UNIVERSIDADE DO ESTADO DO RIO GRANDE DO NORTE - UERN

FACULDADE DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

WALLESCA MEDEIROS DA SILVA

NÚMEROS COMPLEXOS: AVANÇOS TEÓRICOS E CONSOLIDAÇÃO AO LONGO DOS ANOS

Mossoró, RN
2026

WALLESCA MEDEIROS DA SILVA

NÚMEROS COMPLEXOS:
AVANÇOS TEÓRICOS E CONSOLIDAÇÃO AO LONGO DOS ANOS

Monografia apresentada ao Curso de Matemática da Universidade do Estado do Rio Grande do Norte - UERN como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Me. Rivaldo do Nascimento Júnior

Mossoró, RN
2026

WALLESCA MEDEIROS DA SILVA

NÚMEROS COMPLEXOS:
AVANÇOS TEÓRICOS E CONSOLIDAÇÃO AO LONGO DOS ANOS

Monografia apresentada ao Curso de Matemática da Universidade do Estado do Rio Grande do Norte - UERN como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau em Licenciado em Matemática.

Aprovada em: 17 de Junho de 2026.

Prof. Me. Rivaldo do Nascimento Júnior
Universidade do Estado do Rio Grande do Norte - UERN
Orientador

Prof. Me. Laudelino Gomes Ferreira
Universidade do Estado do Rio Grande do Norte - UERN
Examinador

Prof. Esp. Ofinésio Sousa Lavôr
Universidade do Estado do Rio Grande do Norte - UERN
Examinador

© Todos os direitos estão reservados a Universidade do Estado do Rio Grande do Norte. O conteúdo desta obra é de inteira responsabilidade do(a) autor(a), sendo o mesmo, passível de sanções administrativas ou penais, caso sejam infringidas as leis que regulamentam a Propriedade Intelectual, respectivamente, Patentes: Lei n° 9.279/1996 e Direitos Autorais: Lei n° 9.610/1998. A mesma poderá servir de base literária para novas pesquisas, desde que a obra e seu(a) respectivo(a) autor(a) sejam devidamente citados e mencionados os seus créditos bibliográficos.

Catalogação da Publicação na Fonte.
Universidade do Estado do Rio Grande do Norte.

S586n Silva, Wallesca Medeiros da
Números Complexos: Avanços teóricos e consolidação ao longo dos anos.. / Wallesca Medeiros da Silva. - Mossoró - RN, 2026.
56p.

Orientador(a): Prof. Me. Rivaldo do Nascimento Júnior.
Monografia (Graduação em Matemática). Universidade do Estado do Rio Grande do Norte.

1. Matemática. 2. Números Complexos. 3. História da Matemática. 4. Equações cúbicas. 5. Números imaginários. I. Júnior, Rivaldo do Nascimento. II. Universidade do Estado do Rio Grande do Norte. III. Título.

O serviço de Geração Automática de Ficha Catalográfica para Trabalhos de Conclusão de Curso (TCC´s) foi desenvolvido pela Diretoria de Informatização (DINF), sob orientação dos bibliotecários do SIB-UERN, para ser adaptado às necessidades da comunidade acadêmica UERN.

Agradecimentos

Agradeço a Deus, por ter me dado forças, paciência e perseverança para continuar essa jornada, que diga-se de passagem foi uma experiência única e desafiadora.

Aos meus pais, Ana Maria e Vicente, por todo amor e carinho oferecido quando compartilhava meus problemas ou minhas conquistas, e pelo incentivo para persistir em realizar esse sonho. A minha irmã, Valléria Medeiros, por ser minha plateia nos meus ensaios para seminários, ser minha aluna quando quero testar uma dinâmica do meu planejamento de aula do estágio obrigatório, entre outros momentos importantes para minha formação.

Ao meu orientador, Prof. Me. Rivaldo do Nascimento Júnior, pelo convite para escrever este trabalho, pela orientação e pelos ensinamentos não apenas durante a escrita, mas também durante as disciplinas que cursei sob sua docência.

Aos meus amigos e colegas de curso, que estiveram ao meu lado estudando, rindo e chorando durante toda a graduação. Em especial, agradeço a Vitórya Isabel, a qual tive a honra de conhecer, pelo amor e amizade sincera, por todos os momentos que segurou a minha mão e não me deixou desistir.

A todos que contribuiram, diretamente ou indiretamente, para a elaboração deste trabalho.

Muito obrigada!

"Entender o como e o porquê de sua construção nos ajuda a compreender que o papel da história não é acessório na formação de uma imagem da matemática: sua função é também social e política" (ROQUE, 2012).

Resumo

Este trabalho tem como objetivo analisar o processo histórico, social e conceitual que provocou a criação e o desenvolvimento dos números complexos, bem como apresentar sua fundamentação teórica e algumas de suas aplicações. A pesquisa, de natureza bibliográfica e qualitativa, baseia-se em referenciais teóricos da História da Matemática e da Teoria dos Conjuntos. Inicialmente, resgata-se o contexto histórico do século XVI, destacando as contribuições de Cardano, Tartaglia e Bombelli na resolução de equações cúbicas, que levaram ao surgimento dos chamados "números imaginários" a partir do caso irredutível. Em seguida, explora-se as principais contribuições de matemáticos como Euler, De Moivre, Wessel, Gauss e Hamilton, responsáveis pela consolidação teórica dos números complexos, abrangendo a notação "i", a fórmula de De Moivre, a representação geométrica no plano de Argand-Gauss e o reconhecimento dos complexos como pares ordenados de números reais. Na sequência, são apresentados os fundamentos teóricos do conjunto dos números complexos, abrangendo a unidade imaginária, as operações de adição e multiplicação, o conjugado, o módulo, a forma trigonométrica e a fórmula de De Moivre. Por fim, o trabalho explora aplicações dos números complexos em problemas de somatórios binomiais, rotação geométrica e cálculo de áreas de polígonos no plano complexo. Conclui-se que os números complexos, longe de serem meramente "imaginários" ou desprovidos de utilidade prática, constituem uma ferramenta poderosa para a resolução de problemas em diversas áreas da matemática.

Palavras-chave: Matemática, Números Complexos, História da Matemática, Equações Cúbicas, Números imaginários.

Abstract

This work aims to analyze the historical, social, and conceptual process that led to the creation and development of complex numbers, as well as to present their theoretical foundation and some of their applications. The research, of a bibliographic and qualitative nature, is based on theoretical references from the History of Mathematics and Set Theory. Initially, it retrieves the historical context of the 16th century, highlighting the contributions of Cardano, Tartaglia, and Bombelli to the solution of cubic equations, which led to the emergence of so-called "imaginary numbers" from the irreducible case. Next, it explores the main contributions of mathematicians such as Euler, De Moivre, Wessel, Gauss, and Hamilton, who were responsible for the theoretical consolidation of complex numbers, including the notation "i", De Moivre's formula, the geometric representation in the Argand-Gauss plane, and the recognition of complex numbers as ordered pairs of real numbers. Subsequently, the theoretical foundations of the set of complex numbers are presented, covering the imaginary unit, addition and multiplication operations, the conjugate, the modulus, the trigonometric form, and De Moivre's formula. Finally, the work explores applications of complex numbers to problems involving binomial sums, geometric rotation, and area calculation of polygons in the complex plane. It is concluded that complex numbers, far from being merely "imaginary" or devoid of practical utility, constitute a powerful tool for solving problems in various areas of mathematics.

Keywords: Mathematics, Complex Numbers, History of Mathematics, Cubic Equations, Imaginary Numbers.

Lista de Ilustrações

Figura 2.1 – Nicolo Fontana Tartaglia 5
Figura 2.2 – Girolamo Cardano 6
Figura 2.3 – Ars Magna or The Rules of Algebra 6
Figura 2.4 – L'Algebra 12
Figura 3.1 – Contribuições para a construção dos números complexos. 20
Figura 4.1 – Vetor $\overrightarrow{Oz}$. 28
Figura 4.2 – Soma de vetores no plano. 29
Figura 4.3 – Representação dos vetores z_1 e z_2 no plano complexo. 29
Figura 4.4 – Representação do conjugado e módulo de um número complexo z. 30
Figura 4.5 – Representação de um número complexo z no plano de Argand-Gauss. 32
Figura 4.6 – $\widehat{AP} = x$ e $\widehat{AQ} = x + \frac{\pi}{2}$ 33
Figura 4.7 – Sistema de coordenadas xOy, onde o eixo Ox coincide com o eixo Oz_1. . . 34
Figura 4.8 – Número complexo $z_1 = r_1$ e $z_2 = r_2(\cos\alpha + i\sin\alpha)$. 37
Figura 5.1 – Soluções C_1 e C_2 41

Lista de Tabelas

Tabela 3.1 – Regras operatórias de i 14

Sumário

1 Introdução 2

2 Cardano e Tartaglia: uma perspectiva histórica sobre a Resolução das Equações Cúbicas 4

2.1 Resolução da equação cúbica do tipo $x^3 + mx = n$, desenvolvida por Cardano em Ars Magna 7

2.2 Rafael Bombelli e a resolução da cúbica $x^3 - 15x - 4$ 10

3 Construção dos Números Complexos: Principais contribuições 13

3.1 Primeiro registro das potências da unidade imaginária i 13

3.2 Decomposição imaginária de um número real positivo 14

3.3 Representação do número $\sqrt{-1}$ como "i" 15

3.4 Fórmula de De Moivre 16

3.5 Uso de exponencial complexa no $\sin(1 + i)$ e arcos de i 17

3.6 Potência imaginária de um número imaginário como número real 17

3.7 Representação geométrica 18

3.8 Reconhecimento dos números complexos como um par ordenado de números reais 18

4 Teoria 21

4.1 Unidade Imaginária 21

4.1.1 Potências da unidade imaginária 21

4.2 Operações com pares ordenados 22

4.3 Conjunto dos números complexos 23

4.3.1 Propriedades 23

4.3.1.1 Propriedades da Adição 23

4.3.1.2 Propriedades da Multiplicação 25

4.4 Forma algébrica de um número complexo 27

4.5 Interpretação geométrica 28

4.6 Conjugado, módulo e quociente de um número complexo 30

4.6.1 Conjugado da soma e do produto 30

4.6.2 Módulo do produto 31

4.7 Trigonometria e os números complexos 32

4.8 Raízes de números complexos 35

4.8.1 Lei do cosseno 37

5 Algumas aplicações 39

5.1 Aplicação em problemas de somatórios 39

5.2 Aplicação em problemas de rotação 40

5.3 Aplicação no cálculo das áreas de polígonos 41

5.3.1 Área do triângulo 41

5.3.2 Área de um polígono convexo 42
5.3.3 Área de um polígono regular 43
6 Considerações Finais 44

Referências 45

1 Introdução

O presente trabalho propõe apresentar e analisar o processo histórico, social e conceitual que provocou a criação e o desenvolvimento dos Números Complexos, cujo objetivo central é demonstrar a relevância desse estudo para o campo acadêmico.

A escolha deste tema decorre, em primeiro lugar, do meu interesse em História da Matemática e pelo processo de ampliação dos conceitos de números. Além do interesse pessoal, o tema apresenta relevância acadêmica ao possibilitar compreender o contexto histórico e o processo de construção do conhecimento científico acerca do conjunto dos números complexos, que assim como outros conjuntos numéricos se desenvolveu a partir de questionamentos e problemas, que provocam sucessivas tentativas de formulação até a consolidação e validação das ideias.

(ROQUE, 2012) argumenta que a Matemática se desenvolve, e continua a se desenvolver, a partir de problemas. O termo "problema" não remete à algo negativo ligado a falta de conhecimento, trata-se de desafios de natureza cotidiana, de descrição de fenômenos naturais, filosóficos e ainda, matemáticos. Diante disso, o avanço da Matemática decorre da necessidade de solucionar problemas que, à primeira vista, apresentavam-se serem insolucionáveis. Para satisfazer essa necessidade, os matemáticos buscaram aprimorar conceitos já estabelecidos na época ou formular novos conceitos. Tendo isso em vista, a criação de novos conjuntos numéricos tornou-se indispensável para desvendar diversos desafios dentro da Álgebra, como a formulação dos Números Complexos para extrair a raiz quadrada de números negativos.

Considera-se que uma das maiores contribuições para a Álgebra, desde que os babilônios aprenderam a completar o quadrado para equações quadráticas há cerca de 3000 anos atrás, seja a resolução de equações cúbicas apresentada pelo matemático Girolamo Cardano $(1501 - 1576)$ em sua obra titulada Ars Magna or The Rules of Algebra (BOYER, 2001).

Definida da seguinte maneira:

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^2 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}} - \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^2 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}}$$

Ao utilizarmos a fórmula mencionada na equação cúbica $x^3 = 15x + 4$, por exemplo, resulta em

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$

Cardano sabia que uma raiz positiva para essa equação era $x = 4$ apesar de saber que não existia raiz quadrada de um número negativo. Nessa época, os números irracionais já tinham sido aceitos, mesmo não tendo uma base sólida, pelo fato de poderem ser aproximados aos números

racionais. O mesmo ocorreu com os números negativos que, apesar de não serem aproximáveis por números positivos, tornaram-se aceitáveis devido à sua noção de sentido sobre uma reta. Se um algebrista desconsiderava tais números, apenas informava que a dada equação não é solucionável, visto que acreditavam que não era necessário considerar raizes quadradas de números negativos, porém, a resolução da equação cúbica mudou essa perspectiva.

Quando as três raízes de uma cúbica são números reais não nulos, elas sempre levam à raízes quadradas de números negativos, segundo a fórmula de Tartaglia-Cardano, a partir disso, tornou-se necessária a busca por um novo conjunto numérico dentro dos números reais que soluciona-se este problema: os chamados "números imaginários".

Um dos primeiros registros de resoluções de equações cúbicas utilizando os números imaginários foi a resolução da equação $x^3 = 15x + 4$ publicada pelo algebrista italiano Rafael Bombelli, discípulo de Cardano, onde teve a ideia considerada "maluca" de considerar que os números $\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}}$ e $\sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$ fossem escritos como números na forma $a + \sqrt{-b}$ e $a - \sqrt{-b}$, respectivamente. Desse modo, com alguns cálculos chegou a conclusão que $a = 2$ e $b = 1$, resultando em:

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = 2 + \sqrt{-1} \quad \text{e} \quad \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = 2 - \sqrt{-1}$$

A partir disso, surge a pergunta: Como apresentar e analisar o processo histórico e conceitual de forma clara, objetiva e histórica dos eventos que desencadearam a criação e o desenvolvimento do conjunto dos números complexos? Nesse sentido, o presente trabalho propõe-se a recordar e descrever a formulação teórica desse conjunto desde a extração de raízes negativas para solucionar equações até o seu reconhecimento como um par ordenado. Além disso, visa investigar a criação dos números complexos, identificar e debater sobre as contribuições dos matemáticos envolvidos em sua consolidação, destacando os contextos históricos e científicos ao longo dos séculos e discutindo a importância dessas descobertas para compreender a construção do conhecimento matemático acerca dos números complexos. Por fim, também se faz necessário apresentar algumas aplicações desses números em diferentes áreas para evidenciar sua relevância prática e teórica para o desenvolvimento científico.

Essa pesquisa caracteriza-se como pesquisa bibliográfica e qualitativa, voltada à análise teórica da construção dos números complexos. De acordo com (MARCONI; LAKATOS, 2003), a pesquisa bibliográfica abrange toda bibliografia pública em relação ao tema de estudo desde publicações avulsas, jornais, revistas, artigos científicos, monografias, teses, entre outros, ou seja, se trata de uma pesquisa baseada em material já publicado, tendo como objetivo coletar informações e conhecimentos prévios sobre o tema abordado.

Com isso, este trabalho fundamenta-se em uma análise dos referenciais teóricos que tratam de Teoria dos Conjuntos voltada ao conjunto dos números complexos com algumas aplicações, incluindo aplicações propostas por outros autores.

2 Cardano e Tartaglia: uma perspectiva histórica sobre a Resolução das Equações Cúbicas

Segundo (ROQUE, 2012), os livros de ábaco mostravam que a busca por métodos que resolvessem as equações cúbicas não se iniciou no século XV, a partir da publicação do livro "Summa Arithmetica" do matemático italiano Luca Pacioli. Supõe-se que sua origem tenha surgido no século XIV, considerando, assim, que a álgebra desenvolvida entre os séculos XV e XVI é contribuinte aos esforços para encontrar uma solução da cúbica por radicais. Ela comenta ainda que atualmente pensamos que as equações cúbicas são todas de um tipo e que são solucionadas por um mesmo método, entretanto, naquela época como ainda não se adotavam coeficoentes númericos e negativos, os algebristas recorriam-se ao uso de diversos métodos de resolução.

O século XVI foi marcado por uma descoberta feita por matemáticos italianos, a solução algébrica das equações cúbicas e quárticas. O matemático Howard Eves $(1911 - 2004)$, especializado em Geometria e História da Matemática, descreveu resumidamente em seu livro intitulado "Introdução à História da Matemática" como, segundo ele, surgiu a solução das equações cúbicas.

Em 1515, o professor de matemática Scipione del Ferro $(1465\text{-}1526)$, na época lesionava na Universidade de Bolonha, resolveu algébricamente, ao basea-se em fontes árabes, a equação cúbica do tipo $x^3 + mx = n$. Entretanto, não publicou a solução, somente revelou seu trabalho para seu discípulo Antônio Fior. Foi por volta de 1535, que o matemático Nicolo Fontana $(1499 - 1557)$, mais conhecido pelo seu pseudônimo Tartaglia, anunciou em uma publicação ter descoberto a solução para a equação cúbica $x^3 + px^2 = n$. Ao considerar aquilo um blefe, Fior desafiou Tartaglia para uma disputa pública que envolvia a resolução de equações cúbicas. Tartaglia resolveu faltando poucos dias para a disputa a temida equação cúbica sem o termo quadrático proposta por Fior. Dessa forma, como no dia marcado, o mesmo sabia resolver os dois tipos de equações cúbicas enquanto Fior somente sabia resolver uma delas, Tartaglia venceu o desafio (EVES, 2008).

Figura 2.1 – Nicolo Fontana Tartaglia



Fonte: (EVES, 2008)

Alguns anos depois, Girolamo Cardano $(1501 - 1576)$, o qual lecionava matemática e praticava medicina em Milão, conseguiu extrair de Tartaglia por meio de um juramento de confidencialidade, a resolução da equação cúbica. Em 1545, Cardano publicou um livro em latim titulado como "Ars Magna or The Rules of Algebra", onde encontrava-se a solução da cúbica desenvolvida por Tartaglia. Segundo (BOYER, 2001), devemos ressaltar que Cardano não foi o descobridor original da solução da cúbica, o mesmo admite francamente em sua obra que a sugestão para a solução da cúbica foi-lhe dada por Tartaglia. O que ele não mencionou em Ars Magna foi o solene juramento havia feito a Niccolo Tartaglia para que não revelasse o segredo, pois supõe-se que Tartaglia desejava fortalecer sua reputação publicando a solução da cúbica como coroação de seu estudo sobre Álgebra.

Houve muitos protestos vindo de Tartaglia sobre sua resolução ter sido plagiada, essas acusações foram rebatidas por Ludovico Ferrari, um dos díscipulos de Cardano, que argumentou que seu professor havia recebido informações de del Ferro e acusava-o de ter plagiado essa fonte (EVES, 2008).

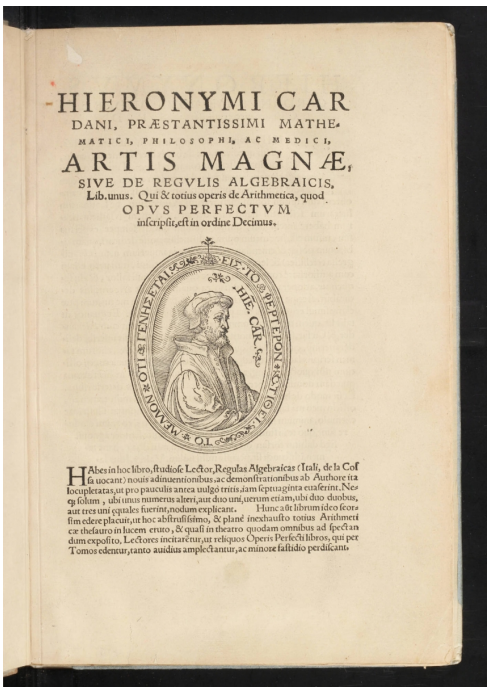
Independente da verdade entre as controvérsias entre os defensores de Cardano e Tartaglia, é evidente que nenhum dos algebristas foi o primeiro a fazer essa descoberta. O verdadeiro responsável pela descoberta da solução da cúbica foi, evidentemente, Scipicione del Ferro. Uma prova disso, como mencionamos anteriormente, é o fato de que mesmo não tendo feito uma publicação sobre seu estudo, antes de sua morte o repassou para seu discípulo Fior.

Figura 2.2 – Girolamo Cardano



Fonte: (EVES, 2008)

Figura 2.3 – Ars Magna or The Rules of Algebra


HIERONYMI CAR
DANI, PRÆSTANTISSIMI MATHE-
MATICI, PHILOSOPHI, AC MEDICI,
ARTIS MAGNÆ,
SIVE DE REGVLIS ALGEBRAICIS,
Lib. unus. Qui & totius operis de Arithmetica, quod
OPVS PERFECTVM
inscripsit, est in ordine Decimus.

HAbes in hoc libro, studiose Lector, Regulas Algebraicas (Itali, de la Cos
su uocant) nouis adinuentionibus, ac demonstrationibus ab Authore ita
locupletatas, ut pro pauculis antea vulgo tritis, iam septuaginta enaruerint. Ne-
q; solum, ubi unus numerus alteri, aut duo uni, uerum etiam, ubi duo duobus,
aut tres uni cquales fuerint, modum explicant. Hunc aũt librum ideo seor-
sim edere placuit, ut hoc abstrusissimo, & planè inexhausto totius Arithmeti
cæ thesauro in lucem eruto, & quasi in theatro quodam omnibus ad spectan-
dum exposito, Lectores incitarẽtur, ut reliquos Operis Perfecti libros, qui per
Tomos edentur, tanto auidius amplectantur, ac minore fastidio perdiscant.

Fonte: https://old.maa.org/press/periodicals/convergence/mathematical-treasure-cardanos-ars-magna

Podemos encontrar várias variações sobre esta trama. Como, por exemplo, a versão da disputa entre Tartaglia e Fior descrita por (BOYER, 2001) ressalta que cada um dos concorrentes desafiou o outro à responder 30 questões envolvendo as equações cúbicas em um determinado intervalo de tempo, afirma-se que Tartaglia tinha solucionado todas as questões de Fior, entretanto um pouco diferente da versão de Eves, afirmou que Fior não resolveu nenhuma das equações propostas a ele. (EVES, 2008) comenta que "a explicação disso é relativamente simples, hoje pensamos em equações cúbicas como sendo essencialmente todas de um mesmo tipo e podendo todas serem resolvidas por um mesmo método" como mencionado no inicio do capítulo.

Na época, devido ao fato dos matemáticos não utilizarem coeficientes negativos, pois ainda existia preconceito contra o uso de outros conjuntos númericos. Sabe-se, por exemplo, que se um algebrista negava a existência de números irracionais ou negativos, apenas concluia que a determinada equação não possuia solução. Segundo (BOYER, 2001), Fior somente sabia resolver equações do tipo "$x^3 + px = q$", ou seja, equações que possuiam cubos e raizes iguais a um número e seus coeficientes números eram positivos e familiares a ele.

2.1 Resolução da equação cúbica do tipo $x^3 + mx = n$, desenvolvida por Cardano em Ars Magna

No que segue, vamos apresentar a resolução da cúbica $x^3 + mx = n$, dada por Cardano em seu livro Ars Magna:

Sabemos que

$$\begin{aligned}(a-b)^3 &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \\ &= a^3 - b^3 - 3ab(a-b).\end{aligned}$$

Assim, obtemos:

$$(a-b)^3 + 3ab(a-b) = a^3 - b^3.$$

Considere $m = 3ab$, $n = a^3 - b^3$ e $x = a - b$, teremos que

$$x^3 + mx = n.$$

Pelas identidades definidas acima, decorre que:

$$a^3 - b^3 = n \;\Rightarrow\; \frac{n}{2} = \frac{a^3 - b^3}{2} \;\Rightarrow\; \left(\frac{n}{2}\right)^2 = \left(\frac{a^3 - b^3}{2}\right)^2 \tag{2.1}$$

e,

$$3ab = m \;\Rightarrow\; \frac{m}{3} = ab \;\Rightarrow\; \left(\frac{m}{3}\right)^3 = a^3b^3. \tag{2.2}$$

Note que, ao somarmos (2.1) e (2.2), obtemos:

$$\begin{aligned}\left(\frac{n}{2}\right)^2+\left(\frac{m}{3}\right)^3 &= \left(\frac{a^3-b^3}{2}\right)^2+a^3b^3\\ &= \frac{a^6-2a^3b^3+b^6}{4}+a^3b^3\\ &= \frac{a^6+2a^3b^3+b^6}{4}\\ &= \frac{(a^3+b^3)^2}{4}.\end{aligned}$$

Extraindo a raiz quadrada, obtemos:

$$\sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2+\left(\frac{m}{3}\right)^3}=\frac{a^3+b^3}{2}.$$

Daí, ao somarmos $\frac{n}{2}$, temos:

$$\frac{n}{2}+\sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2+\left(\frac{m}{3}\right)^3}=\frac{a^3-b^3}{2}+\frac{a^3+b^3}{2}=a^3.$$

E, ao subtrairmos $\frac{n}{2}$, temos:

$$-\frac{n}{2}+\sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2+\left(\frac{m}{3}\right)^3}=-\frac{a^3-b^3}{2}+\frac{a^3+b^3}{2}=b^3.$$

Dessa forma, temos que:

$$a=\sqrt[3]{\frac{n}{2}+\sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2+\left(\frac{m}{3}\right)^3}} \quad \text{e} \quad b=\sqrt[3]{-\frac{n}{2}+\sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2+\left(\frac{m}{3}\right)^3}}.$$

Portanto,

$$x = a-b,$$

ou seja,

$$x=\sqrt[3]{\frac{n}{2}+\sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2+\left(\frac{m}{3}\right)^3}}-\sqrt[3]{-\frac{n}{2}+\sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2+\left(\frac{m}{3}\right)^3}} \tag{2.3}$$

Mas a pergunta que deve-se fazer é: E para equações do tipo $ax^3+bx^2+cx+d=0$, como fica a resolução?

Façamos a seguinte transformação:

$$x = z - \frac{b}{3a}.$$

Note que,

$$a\left(z - \frac{b}{3a}\right)^3 + b\left(z - \frac{b}{3a}\right)^2 + c\left(z - \frac{b}{3a}\right) + d = 0$$

$$a\left(z^3 - 3z^2\frac{b}{3a} + 3z\frac{b^2}{9a^2} - \frac{b^3}{27a^3}\right) + b\left(z^2 - 2z\frac{b}{3a} + \frac{b^2}{9a^2}\right) + cz - c\frac{b}{3a} + d = 0$$

$$az^3 - bz^2 + \frac{b^2}{3a}z - \frac{b^3}{27a^2} + bz^2 - \frac{2b^2}{3a}z + \frac{b^3}{9a^2} + cz - \frac{bc}{3a} + d = 0.$$

Dividindo todos os membros por a, temos que:

$$z^3 + \frac{b^2}{3a^2}z - \frac{b^3}{27a^3} + bz^2 - \frac{2b^2}{3a^2}z + \frac{b^3}{9a^3} + \frac{c}{a}z - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a} = 0$$

$$z^3 + 3\left(\frac{b^2}{9a^2} - \frac{2b^2}{9a^2} + \frac{c}{3a}\right)z - \frac{b^3}{27a^3} + \frac{b^3}{9a^3} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a} = 0$$

$$z^3 + 3\left(\frac{-b^2 + 3ac}{9a^2}\right)z + \frac{2b^3 - 9abc + 27a^2d}{27a^3} = 0.$$

Considerando $p = \dfrac{-b^2 + 3ac}{9a^2}$ e $q = \dfrac{2b^3 - 9abc + 27a^2d}{27a^3}$, concluímos que:

$$z^3 + 3pz + q = 0.$$

Portanto, vemos que essa transformação sugere reduzir uma equação cúbica completa numa equação cúbica incompleta do tipo $x^3 + mx = n$.

Agora, veremos na prática a aplicação da fórmula desenvolvida por Cardano-Tartaglia para encontrar a raíz da equação incompleta $x^3 - 15x = 4$:

Tomando $m = -15$ e $n = 4$, teremos que:

$$\frac{m}{3} = \frac{-15}{3} = -5 \;\Rightarrow\; \left(\frac{m}{3}\right)^3 = (-5)^3 = -125$$

$$\frac{n}{2} = \frac{4}{2} = 2 \;\Rightarrow\; \left(\frac{n}{2}\right)^2 = 2^2 = 4.$$

Daí,

$$\left(\frac{m}{3}\right)^3 + \left(\frac{n}{2}\right)^2 = -125 + 4 = -121.$$

Assim, pela fórmula de Cardano-Tartaglia, temos que:

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}.$$

Cardano sabia que uma das raizes para essa equação era $x = 4$, apesar de saber que não existia raiz quadrada de um número negativo, visto que não conseguia compreender como sua regra fazia sentido nessa situação. Assim, ele resolveu se aventurar em outra situação, onde pedia-se que dividisse 10 em duas de forma que o produto dessas partes resultasse em 40. Essas regras usuais da Álgebra levaram as seguintes respostas: $5 + \sqrt{-15}$ e $5 - \sqrt{-15}$ ou na notação de Cardano, $5p{:}R\ m{:}15$ e $5m{:}R\ m{:}15$.

Mesmo diante da coerência algébrica dessa solução, Cardano ainda questionava seu significado e sua utilidade para a Matemática, visto que:

> Cardano se referia a essas raízes quadradas de números negativos como "sofisticadas" e concluia que o resultado nesse caso era "tão sutil quanto inútil". Autores posteriores mostrariam que tais manipulações eram de fato sutis, mas nada inúteis. é um merito de Cardano que ele ao menos tenha dado alguma atenção a essa intrigante situação. (BOYER, 2001)

Na época, os números irracionais já tinham sido aceitos pelos matemáticos, mesmo que pudessem aproximados aos números racionais, ainda não possuíam uma base sólida. E o mesmo ocorreu com os números negativos que, apesar de não serem aproximavéis por números positivos, tornaram-se aceitáveis devido à noção de sentido sobre uma reta. Se um algebrista desconsiderava tais números, apenas afirmava que a dada equação não é solucionável, como por exemplo, as equações "$x^2 = 2$" e "$x + 2 = 0$" eram consideradas insolucionáveis. Muitos acreditavam que não era necessário considerar raizes quadradas de números negativos, porém, a resolução da equação cúbica retratada por Cardano em Ars Magna mudou essa perspectiva.

Quando as raízes de uma cúbica são números reais não nulos, elas sempre levam a resolução à raízes quadradas de números negativos, segundo a fórmula de Tartaglia-Cardano, como vimos na equação (2.3). Mesmo ciente de que as raízes fossem números reais, como poderia chegar a essa conclusão sem desconsiderar as raízes desses números? A partir disso, tornou-se necessária a busca por um novo conjunto numérico dentro dos números reais que soluciona-se este problema, Cardano denominava-os como "numeri ficti", conhecidos atualmente como "números imaginários" ou "números complexos".

2.2 Rafael Bombelli e a resolução da cúbica $x^3 - 15x - 4$

Aproximadamente em 1572, segundo (EVES, 2008), o algebrista italiano Rafael Bombelli $(1526 - 1572)$ publicou em seu livro titulado "L'Algebra" uma contribuição para a solução da equação cúbica $x^3 = 15x + 4$, o mesmo seguiu a fórmula desenvolvida por Cardano e Tartaglia, o que o levou para a seguinte relação que demonstramos anteriormente:

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}.$$

Por substituição direta, sabemos que a única raiz real positiva para essa equação é $x = 4$. Isso se deve pela observação feita por Cardano de que, quando todos os membros de um lado da equação possui grau maior que os do outro lado, a equação possui apenas uma raiz positiva.

Com isso, Bombelli desenvolveu uma "ideia louca", como menciona Carl Boyer (BOYER, 2001), que consistia em supor que os radicais poderiam se relacionar entre si de modo que resultassem em um número real. É nítido que se a soma das partes reais desse radicais resultam em 4, então a parte real de cada um deveria ser 2.

Desse modo, Bombelli supôs que um desses radicais possuia a forma $a + \sqrt{-b}$, onde $a = 2$. Assim, o algebrista considerou que:

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = a + b\sqrt{-1}.$$

Elevando os termos de ambos os lados ao cubo, teremos que:

$$\left(\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}}\right)^3 = \left(\sqrt[3]{a + b\sqrt{-1}}\right)^3$$
$$2 + \sqrt{-121} = a^3 + 3a^2b\sqrt{-1} - 3ab^2 - b\sqrt{-1}$$
$$2 + 11\sqrt{-1} = (a^3 - 3ab^2) + (3a^2b - b)\sqrt{-1}.$$

Daí,

$$a(a^2 - 3b^2) = 2 \tag{2.4}$$

e,

$$b(3a^2 - b^2) = 11. \tag{2.5}$$

Como Bombelli supôs que a parte real é 2, tomemos $a = 2$ em (2.4):

$$\begin{aligned} a(a^2 - 3b^2) = 2 \quad &\Rightarrow \quad 2(2^2 - 3b^2) = 2 \\ &\Rightarrow \quad 4 - 3b^2 = 1 \\ &\Rightarrow \quad 3b^2 = 3 \\ &\Rightarrow \quad b = 1. \end{aligned}$$

Note que, se $b = 1$, temos:

$$\begin{aligned} b(3a^2 - b^2) = 11 \quad &\Rightarrow \quad 3 \cdot 2^2 - 1^2 = 11 \\ &\Rightarrow \quad 3 \cdot 4 - 1 = 11. \end{aligned}$$

O que é verdade! Logo, $a = 2$ e $b = 1$, assim:

$$2 + \sqrt{-121} = 2 + \sqrt{-1} \tag{2.6}$$

De maneira semelhante, podemos afirmar que:

$$2 - \sqrt{-121} = 2 - \sqrt{-1} \tag{2.7}$$

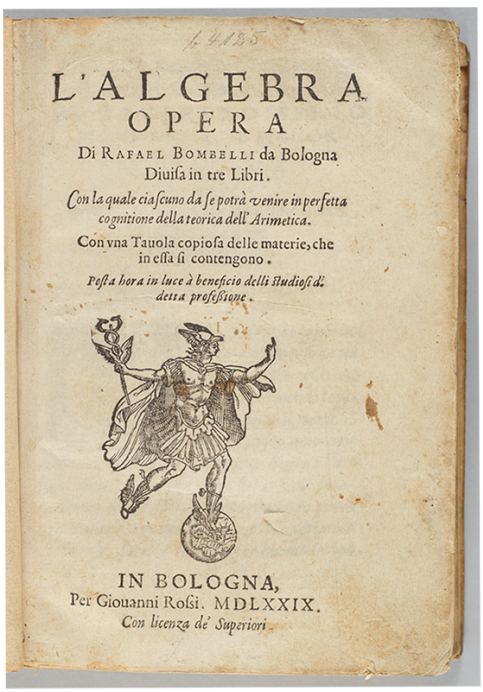
Por fim, o algebrista Bombelli, a partir de (2.6) e (2.7), concluiu que:

$$x = (2 + \sqrt{-1}) \ + \ (2 - \sqrt{-1}) = 4$$

Na época essa observação não contribuiu grandiosamente para a solução de cúbicas, pois Bombelli somente chegou a esse resultado a partir do valor de uma das raízes da equação. Entretanto, foi com esse raciocinio que Bombelli demonstrou que os números complexos conjugados iriam desempenhar um papel importante no futuro.

(BOYER, 2001) comenta que qualquer tentativa de encontrar algebricamente as raízes cúbicas de números complexos seguindo a regra de Cardano e Tartaglia leva à própria cúbica inicial, ou seja, volta ao seu ponto de partida. Essa condição, que causou transtornos aos algebristas da época, é o chamado "caso irredutível" das equações cúbicas.

Figura 2.4 – L'Algebra



Fonte: https://old.maa.org/press/periodicals/convergence/mathematical-treasures-bombellis-algebra

3 Construção dos Números Complexos: Principais contribuições

Ao longo dos séculos, mediante as necessidades de ampliar o conjunto dos números reais, diversos matemáticos contribuiram para a criação e formalização dos números complexos, propondo novos conceitos e soluções que pudessem superar as limitações dos sistemas numéricos existentes. Ressalta-se que analisar as contribuições desses matemáticos é essencial para compreender tanto a estrutura desse conjunto numérico quanto o seu percurso histórico.

Dessa forma, este capítulo apresenta algumas das principais contribuições desses matemáticos no processo de construção do conjunto dos números complexos.

3.1 Primeiro registro das potências da unidade imaginária i

Sabemos que assim como Girolamo Cardano $(1501 - 1576)$, Rafael Bombelli $(1526 - 1572)$ também não escrevia a notação $x = \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$ dessa maneira, determinava a raiz quadrada por $R.q$ e a raiz cúbica por $R.c$. Desse modo, ele escrevia essa notação como $R.c.\ 2.p.dm.R.q.121 + R.c.\ 2.m.dm.R.q.121$. Podemos observar que ele usava a notação $dm.R.q.121$ para $-\sqrt{-121}$ que difere de $R.q.m.121$, o que indicava que a sua notação para $-\sqrt{-121}$ dava destaque à operação realizada com esse número, e não o número obtido como raiz de uma quantidade negativa.

(ROQUE, 2012) discute que o mais interessante dessas notações é que $p.dm$ se trata de uma abreviação para "più di meno", em italiano, denomina que estamos somando a raiz quadrada do número negativo e $m.dm$ é a abreviação de "meno di meno", que denomina a subtração dessa mesma quantidade. Bombelli também fornecia outros algoritmos que permitiam calcular uma multiplicação por qualquer outro número, onde afirmava que $m.dm. \times m.dm$, que é o mesmo que $(-\sqrt{-1}) \times (-\sqrt{-1}) = -1$. Ele admitia enunciar regras de cálculos com esses números, assim como reconhecia a existência de raízes negativas e afirmava que essas expressões são mais "sofisticadas" do que reais. Segundo Roque esse termo indicava que essas expressões produziam sofismas ao traduzir e analisar o seguinte trecho:

> "Encontrei um outro tipo de raiz cúbica composta, muito diferente das outras, no capítulo do "cubo igual a tanto e número", quando o cubo da terça parte do tanto é maior que o quadrado da metade do número, como nesse capitulo se demonstrará, [...] porque quando o cubo do terço do tanto é maior que o quadrado da metade do número, o excesso não se pode chamar nem mais nem menos, pelo que lhe chamarei de *più di meno*, quando se adicionar, e *meno di meno* quando se subtrair, [...] E essa operação é necessária [...] pois são muitos

> os casos de adicionar onde surge essa raiz, [...] mas primeiro tratarei de os multiplicar, escrevendo a regra de mais e de menos." (BOMBELLI, 1579)

Assim, em seguida, passa a enunciar as regras de cálculo. Mais tarde, na historiografia retrospectiva da matemática, afirma-se que *più*, *meno*, *più di meno* e *meno di meno* são 1, -1, i e $-i$, respectivamente. (SILVA, 2011) descreveu em seu artigo todas as regras operatórias criadas por Bombelli:

Tabela 3.1 – Regras operatórias de i

Più via più di meno, fa più di meno	$+(+i) = +i$
Meno via più di meno, fa meno di meno	$-(+i) = -i$
Più via meno di meno, fa meno di meno	$+(-i) = -i$
Meno via meno di meno, fa più di meno	$-(-i) = +i$
Più di meno via più di meno, fa meno	$(+i)(+i) = -1$
Più di meno via meno di meno, fa più	$(+i)(-i) = +1$
Meno di meno via più di meno, fa più	$(-i)(+i) = +1$
Meno di meno via meno di meno, fa meno	$(-i)(-i) = -1$

Fonte: (SILVA, 2011).

Além disso, a partir da dedução de que $x = (2 + \sqrt{-1}) + (2 - \sqrt{-1}) = 4$, Bombelli criou a regra para a soma de dois números do tipo $p + q\sqrt{-1}$:

$$(a + b\sqrt{-1}) + (c + d\sqrt{-1}) = (a + b) + (c + d)\sqrt{-1}.$$

Podemos concluir a partir desse ponto que a obra de Cardano originou os números complexos, entretanto o matemático que estabeleceu regras para operar esses números foi Rafael Bombelli. (SILVA, 2011) ressalta que por mais que parecesse natural essa introdução dos números complexos possa ter surgido a partir de equações de segundo grau, pois nela surge pela primeira vez um caso de impossibilidade no conjunto dos números reais, porém tal hipotese não foi confirmada. Como vimos, esses números surgiram para resolver um tipo particular de equação do terceiro grau.

3.2 Decomposição imaginária de um número real positivo

O filósofo e matemático alemão Gottfried Wilhelm Leibniz $(1646 - 1716)$, em uma de suas contribuições relativamente secundárias segundo (BOYER, 2001), expôs alguns comentários sobre os números complexos, em uma época em que os mesmos estavam sendo esquecidos, e a observação do sistema binário de numeração. Leibniz fatorou a expressão "$x^4 + a^4$" em:

$$\left(x + a\sqrt{\sqrt{-1}}\right) \cdot \left(x - a\sqrt{\sqrt{-1}}\right) \cdot \left(x + a\sqrt{-\sqrt{-1}}\right) \cdot \left(x - a\sqrt{-\sqrt{-1}}\right)$$

e mostrou que $\sqrt{6} = \sqrt{1+\sqrt{-3}} + \sqrt{1-\sqrt{-3}}$, uma decomposição imaginária de um número real positivo. Entretanto, Leibniz não escreveu as raízes quadradas de números complexos na forma complexa padrão, tampouco conseguiu provar a sua conjetura de que $f(x+\sqrt{-1}y)+f(x-\sqrt{-1}y)$ é real se $f(z)$ é um polinômio real.

3.3 Representação do número $\sqrt{-1}$ como "i"

No século XVIII, dois grandes matemáticos fizeram história e construiram marcos fundamentais para o avanço da Matemática, sendo eles Leonhard Euler $(1707-1783)$ e Jean Le Rond D'Alemberd $(1717-1783)$. Assim como (SILVA, 2011) comenta em seu artigo, existe uma coincidência em seus trabalhos que vai além do ano de suas mortes e do apreço pela matemática, ambos contribuíram para o desenvolvimento do conceito dos números complexos.

Segundo (BOYER, 2001), estima-se que entre 1727 e 1783, a pena de Euler permaneceu ocupada em aumentar os conhecimentos disponíveis em quase todos os ramos da matemática pura e aplicada, desde os mais elementares aos mais avançados. Euler escrevia na linguagem e notação que usamos atualmente, pois nenhum outro matemático foi grandiosamente responsável pela forma da matemática de nível avançado de hoje quanto Euler. O matemático usava "e" mais de uma duzia de vezes em suas obras para representar a base do sistema de logaritmos naturais. Há mais de um século antes, o conceito desse número era conhecimento desde a invenção dos logaritmos, entretanto não existia uma notação padronizada para ele. Em 1731, numa carta a Goldbach $(1690-1764)$, Euler usou a letra "e" para "aquele número cujo logaritmo hiperbólico $=1$", apareceu publicado pela primeira vez na obra "Mechanica" de Euler em 1736, onde a dinâmica de Newton $(1643-1727)$ é apresentada de forma analitica, assim a notação derivada da palavra "exponencial" logo tornou-se padrão.

O símbolo "i" para representar o número $\sqrt{-1}$ é outra notação utilizada por Euler, embora tenha sido adotada quase no fim de sua vida, em 1777. Especula-se que esse uso veio tarde pelo fato de suas primeiras obras ele usara i para representar um "número infinito", parecido com como John Wallis $(1616-1703)$ usara μ, assim como Euler escrevia $e^x = \left(1+\frac{x}{i}\right)^i$ ao invés de escrever $e^x = \lim_{h\to\infty}\left(1+\frac{x}{h}\right)^h$. Embora Euler usasse "$i$" para "$\sqrt{-1}$" em seu manuscrito de 1777, o mesmo somente foi publicado em 1794.

Assim como Euler, D'Alembert possuía uma formação ampla em direito, medicina, matemática e ciência. Como tinham interesses em comum, ambos trocavam correspondências frequentemente sobre diversos assuntos. Por exemplo, como $\log(-1)^2 = \log(+1)^2$, equivalentes a $2\log(-1) = 2\log(+1)$ ou a $\log(-1) = \log(+1)^2$ os deixavam intrigados no começo do século XIII, porém em 1747 Euler explicou, por meio de uma de suas correspondências, para D'Alembert que os logaritmos dos números negativos não são reais, como D'Alembert acreditava, se tratava de imaginários puros.

(MILIES, 1993), comenta em seu artigo que a expressão "imaginário puro" naquela época já fazia sentido, uma vez que os termos "real" e "imaginário" foram utilizados por René Descartes $(1569 - 1650)$, em 1637, e D'Alembert, em 1746, publicou "Refléxions sur la cause générale des vents", afirmou que toda expressão construída algebricamente a partir de um número complexo é da forma "$a + bi$", sendo a e b números reais.

Além disso, (BOYER, 2001), comenta que D'Alembert gastou muito tempo e esforço para provar o teorema fundamental da Álgebra, o qual afirma que toda equação polinomial $f(x) = 0$, com coeficentes complexos e de grau $n \geq 1$, possui pelo menos uma raiz complexa, esforçou excessivamente qual na França hoje denomina-se como teorema de D'Alembert. Ao pensarmos na resolução de uma equação polinomial como uma generalização das operações algébricas explicitas, podemos dizer que:

> "[...] D'Alembert queria provar que o resultado de qualquer operação algébrica efetuada sobre um número complexo é por sua vez um número complexo. Num certo sentido, então, Euler fez para as operações transcedentes elementares o que D'Alembert tentara fazer para operações algébricas." (BOYER, 2001)

Entretanto, consideramos que devido a adoção desse simbolo no clássico "Disquisitiones arithmeticae" escrito por Gauss $(1777 - 1855)$ e publicada em 1801 que fez com que o "i" tomasse lugar entre as notações matemáticas.

3.4 Fórmula de De Moivre

O matemático huguenote francês Abraham De Moivre $(1667 - 1754)$ teve um papel importante na história da matemática atuarial, considera-se, segundo (EVES, 2008), que De Moivre foi o primeiro a utilizar a integral:

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

em Probabilidade, assim como a curva de frequência normal:

$$y = ce^{-hx^2},$$

onde c e b são constantes, que é utilizada para modelagem de fenômenos contínuos cujos valores tendem a se agrupar em torno de uma média central.

No que envolve os números complexos, contribuiu com a conhecida fórmula titulada com seu nome: "Fórmula de De Moivre", na qual afirma que:

$$(\cos x + i \sin x)^n = \cos(nx) + i \sin(nx),$$

onde n é um inteiro positivo. Esta fórmula foi dada em 1707, a mesma estabelece uma ligação dos números complexos com a trigonometria.

3.5 Uso de exponencial complexa no $\sin(1+i)$ e arcos de i

As quantidades como $sen(1+i)$ ou arcos de i, expressas na forma padrão para números complexos, podem ser encontradas a partir das identidades de Euler. Para o primeiro caso, (BOYER, 2001) descreveu que:

$$\sin(1+i) = \frac{e^{i(1+i)} - e^{-i(1+i)}}{2i},$$

que de acordo com o mesmo, se encontra $\sin(1+i) = a + bi$ onde:

$$a = \frac{[(1+2e)\sin 1]}{2e} \text{ e } b = \frac{[(2e-1)\cos 1]}{2e}.$$

Para o segundo caso, escreve-se $\arccos i = x + iy$ ou $i = \cos(x+iy)$ ou

$$\begin{aligned} i &= \frac{e^{i(x+iy)} + e^{-i(x+iy)}}{2} \\ &= \frac{1+e^{2y}}{2e^y} \cdot \cos x + i \cdot \frac{(1-e^{2y})}{2e^y} \cdot \sin x. \end{aligned}$$

Ao igualar as partes reais e imaginárias nota-se que $\cos x = 0$ e $x = \pm\frac{\pi}{2}$. Logo,

$$\frac{1-e^{2y}}{2e^y} = \pm 1 \text{ ou } e^y = \pm 1 \pm \sqrt{2}.$$

Como x e y devem ser números reais, observamos que:

$$x = \pm\frac{\pi}{2} \text{ e } y = \ln(\pm 1 + \sqrt{2}).$$

Diante disso, (BOYER, 2001) afirma que de modo semelhante podemos efetuar outras operações transcendentes sobre os números complexos, que resultam em números complexos.

3.6 Potência imaginária de um número imaginário como número real

Em 1746, em uma carta destinada a Christian Goldbach $(1690 - 1764)$, Euler mostrou que uma potência imaginária de um númerio imaginário pode ser um número real através do

resultado de $i^i = e^{-\pi/2}$. Segundo (BOYER, 2001), partindo de $e^{i\theta} = \cos\theta + i \cdot \sin\theta$ temos, para $\theta = \frac{\pi}{2}$, $e^{\pi i/2}$. Logo,

$$(e^{\pi i/2})^i = e^{\pi i^2/2} = e^{-\pi/2}$$

(BOYER, 2001) acrescenta que há infinitos valores reais para ii, como Euler mais tarde mostrou através de $e^{(-\pi/2 \pm 2K\pi)}$, onde K é um número inteiro. Por exemplo, nas Memórias da Academia de Berlim, em 1749 o matemático mostrou que toda potência complexa de um número complexo $(a + bi)^{a+bi}$ pode ser expressa como um número complexo $p + qi$, porém essa dedução não despertou interesse na época e o valor real de ii precisou ser redescoberto no século XIX.

3.7 Representação geométrica

No inicio do século XIX, Carl Friedrich Gauss $(1777 - 1855)$, publicou seus principais trabalhos relevantes para o desenvolvimento da matemática no Gottingen Gesellschaft der Wissenschaften. Segundo (BOYER, 2001), os historiadores frequentemente comentam sobre o primeiro de seus influentes artigos sobre teoria dos números, publicado em 1812, por conter a representação geométrica de Gauss para os números complexos. Acrescenta que:

> "A importancia do artigo está mais no fato de abrir caminho para a extensão da teoria dos números do corpo real para o complexo e mais além. Como se observou acima, isto foi crucial na obra de outros que mais tarde trabalharam neste campo." (BOYER, 2001)

Entretanto, o autor admite que é importante observar que a representação gráfica dos complexos havia sido descoberta por Caspar Wessel $(1745 - 1818)$ em 1797 e publicada na academia dinamarquesa em 1798, porém o trabalho foi ignorado, fazendo com que casualmente o plano complexo seja chamado atualmente de palno de Gauss, embora sua publicação tenha sido feita anos mais tarde.

Naquela época, desde as publicações de Albert Girard $(1595 - 1632)$ sobre Álgebra, sabia-se que os números reais podiam ser representados como pontos de uma reta. John Wallis $(1616 - 1703)$ havia sugerido que os imaginários puros fossem representados numa perpendicular ao eixo dos reais, porém, ninguém antes de Wessel e Gauss pensou nas partes reais e imaginária de um número complexo $a + bi$ como coordenadas retangulares de partes de um plano.

3.8 Reconhecimento dos números complexos como um par ordenado de números reais

Em 1833, de acordo com (BOYER, 2001), o matemático, físico e astrónomo irlandês William Rowan Hamilton $(1805 - 1865)$ apresentou em 1833 um extenso e significavo artigo

à Academia Irlandesa, em que introduziu uma àlgebra formal de pares de números complexos cujas regras de combinação são precisamente como as dadas nos tempos atuais para números complexos. Ele definia a soma e o produto dos pares ordenados da seguinte maneira:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) \text{ e } (a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc),$$

onde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, como uma operação que envolvia rotação. Percebe-se aqui o conceito de um número complexo como par ordenado de números reais, ideia da qual estava indicava nas representações gráficas de Wessel, Argand e Gauss.

(EVES, 2008) aponta que o sistema dos números reais está contido no sistema dos números complexos, isso significa que, identificando-se cada número real x como um par ordenado $(x, 0)$, essa correspondência preserva a adição e a multiplicação, pois temos que:

$$(a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0) \text{ e } (a, 0) \cdot (0, b) = (0, ab).$$

Ou seja, o par ordenado $(x, 0)$ pode ser substituido pelo número x relacionado a ele. Ademais, acrescenta que a partir da forma de Hamilton se obtém a forma antiga de um número complexo.

Notemos que todo número complexo (a, b) pode ser escrito como:

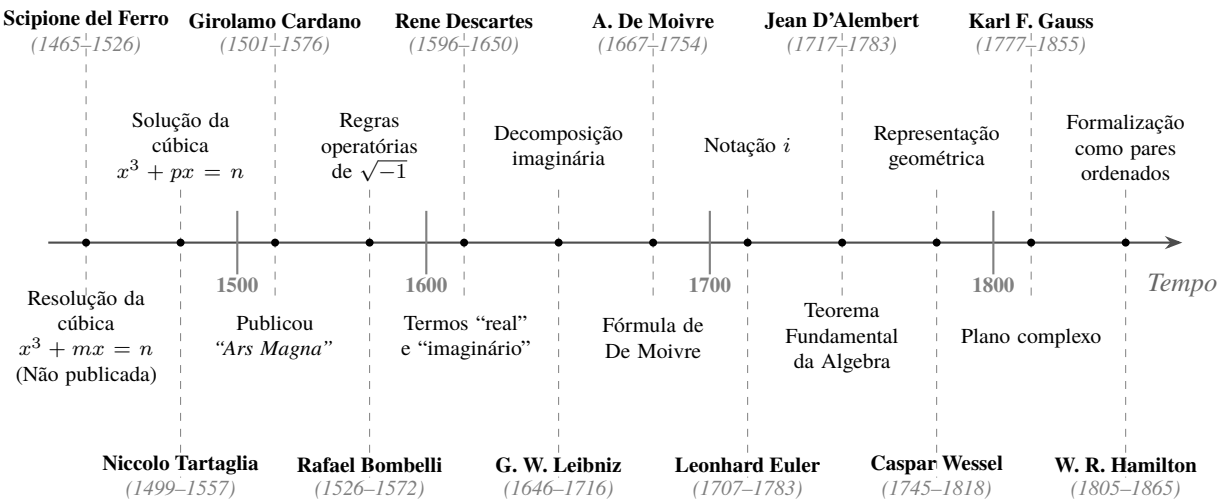
$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (b, 0) \cdot (0, 1) = a + bi,$$

onde $(0, 1)$ é representado pelo símbolo i e identificamos os pares $(a, 0)$ e $(0, b)$ com os números reais a e b.

Além disso, Hamilton compreendia que seus pares ordenados poderiam ser interpretados como entidades orientadas no plano e, de forma natural, tentou ampliar essa ideia para três dimensões, assim passando do número complexo binário $a + bi$ para as triplas ordenadas $a + bi + cj$. A operação de adição não apresentava dificuldades, entretanto durante dez anos enfrentou problemas com a multiplicação de n-uplas para n maior que dois.

A Figura 3.1 apresenta, de forma cronológica, os principais avanços que levaram à consolidação do conjunto dos números complexos, sintetizando as contribuições dos matemáticos apresentados ao longo deste capítulo.

Figura 3.1 – Contribuições para a construção dos números complexos.



Fonte: Elaborado pelos autores.

Como podemos observar, a construção do conjunto dos números complexos se desenvolveu de forma progressiva, constituindo um processo histórico marcado por contribuições de diversos matemáticos. A partir dessa fundamentação, o capítulo seguinte apresentará a formalização teórica dos números complexos.

4 Teoria

Como vimos anteriormente, a construção dos números complexos ocorreu a partir das contribuições de diferentes matemáticos no decorrer dos séculos após os estudos de Girolamo Cardano e Niccolo Tartaglia, os quais, ao lidarem com expressões envolvendo raízes de números negativos, perceberam a necessidade de um novo conjunto númerico.

Desse modo, este capítulo tem como objetivo apresentar os números complexos, abordando sua definição, suas propriedades, sua forma algébrica e geométrica no plano complexo e seu envolvimento com a Trigonometria, assim, demonstrando sua importância no desenvolvimento teórico da matemática.

4.1 Unidade Imaginária

Definição 4.1. *Denomina-se "unidade imaginária" e representa-se por i o número complexo $z = 0 + i$. Segundo as regras operatórias desenvolvidas por (BOMBELLI, 1579), podemos afirmar que:*

$$i^2 = i \cdot i = -1.$$

Isto é, a propriedade fundamental da unidade imaginária é:

$$i^2 = -1$$

4.1.1 Potências da unidade imaginária

Aplicando a propriedade associativa da multiplicação na propriedade fundamental da unidade imaginária, temos que:

$$i^3 = i^2 \cdot i = (-1) \cdot i = -i$$
$$i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1) \cdot (-1) = 1$$

As potências de i são periódicas com período igual a 4. Pelo Algoritmo da Divisão de Euclides, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, existem $q, r \in \mathbb{N}$ tais que:

$$n = 4q + r, \text{ onde } 0 \leq r < 4.$$

Daí, note que:

$$i^n = i^{4q+r} = i^{4q} \cdot i^r = (i^4)^q \cdot i^r = 1^q \cdot i^r = 1 \cdot i^r = i^r.$$

Agora vamos analisar os casos dos restos r:

$$r = 0 \Rightarrow i^0 = 1,$$

$$r = 1 \Rightarrow i^1 = i,$$

$$r = 2 \Rightarrow i^2 = -1,$$

$$r = 3 \Rightarrow i^3 = -i.$$

Portanto, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que:

$$i^{4q} = 1,\ i^{4q+1} = i,\ i^{4q+2} = -1 \text{ e } i^{4q+3} = -i.$$

4.2 Operações com pares ordenados

Antes de partir para a definição do conjunto dos números complexos como par ordenado, definiremos as operações com pares ordenados, segundo (IEZZI, 2005):

Seja $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais. Consideremos o seguinte produto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$:

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\},$$

ou seja, $\mathbb{R}^2$ se trata do conjunto dos pares ordenados (x, y), onde x e y são números reais.

Tomemos (a, b) e (c, d) dois elementos de $\mathbb{R}^2$ para determinar as seguintes definições:

(i) Igualdade:

Dois pares ordenados são iguais se, e somente se, seus primeiros termos são iguais e seus segundos termos são iguais. Ou seja,

$$(a, b) = (c, d) \iff a = c, b = d.$$

(ii) Adição:

Define-se a soma de dois pares ordenados a um novo par ordenados cujos primeiro e segundo termo são, respectivamente, obtidos pela soma dos primeiros termos e a soma dos segundos termos dos pares dados. Isto é,

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d).$$

(iii) Multiplicação:

Define-se o produto de dois pares ordenados a um novo par ordenado cujo primeiro termo é dado pela diferença o produto dos primeiros termos e o produto dos segundos termos dos pares dados, e cujo segundo termo é dado pela soma dos produtos do primeiro termo de um dos pares pelo segundo termo do outro. Isto é,

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

4.3 Conjunto dos números complexos

Denomina-se conjunto dos números complexos, representado por $\mathbb{C}$, o conjunto composto por pares ordenados de números reais para os quais estão definidas as operações de igualdade, adição e multiplicação conforme o item anterior.

Adota-se representar cada elemento $(x, y) \in \mathbb{C}$ pelo simbolo z, de modo que $z = (x, y)$. Assim,

$$z \in \mathbf{C} \iff z = (x, y), \text{ sendo } x, y \in \mathbb{R}.$$

4.3.1 Propriedades

4.3.1.1 Propriedades da Adição

Teorema 4.1. *A operação de adição no conjunto $\mathbb{C}$ verifica as seguintes propriedades:*

(A_1) *Associatividade*

$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$*, quaisquer que sejam* $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$*.*

(A_2) *Comutatividade*

$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$*, quaisquer que sejam* $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$*.*

(A_3) *Existência do elemento neutro*

Existe um elemento $e_a \in \mathbb{C}$ *tal que* $z + e_a = z$*, qualquer que seja* $z \in \mathbb{C}$

(A_4) *Existência do elemento simétrico*

Para todo $z \in \mathbb{C}$ *existe um elemento* $z' \in \mathbb{C}$ *tal que* $z + z' = e_a$*.*

Demonstração. Sejam $z_1 = (a, b)$, $z_2 = (c, d)$ e $z_3 = (e, f)$ elementos de $\mathbb{C}$.

(A_1) Observe que:

$$\begin{aligned}(z_1 + z_2) + z_3 &= [(a,b) + (c,d)] + (e,f)\\ &= (a+c, b+d) + (e,f)\\ &= [(a+c)+e, (b+d)+f]\\ &= [a+(c+e), b+(d+f)]\\ &= (a,b) + (c+e, d+f)\\ &= (a,b) + [(c,d) + (d,f)]\\ &= z_1 + (z_2 + z_3).\end{aligned}$$

(A_2) Note que:

$$\begin{aligned}z_1 + z_2 &= (a,b) + (c,d)\\ &= (a+c, b+d)\\ &= (c+a, d+b)\\ &= (c,d) + (a,b)\\ &= z_2 + z_1.\end{aligned}$$

(A_3) Tomando $z = (a,b)$, provemos que existe $e_a = (x,y)$ tal que $z + e_a = z$:

$$(a,b) + (x,y) = (a,b) \iff \begin{cases} a + x = a \\ b + y = b \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Logo, existe $e_a = (0,0)$, chamado de "elemento neutro" para adição, no qual somado a qualquer complexo z resulta no próprio z.

(A_4) Tomando $z = (a,b)$, provemos que existe $z' = (x,y)$ tal que $z + z' = e_a$:

$$(a,b) + (x,y) = (0,0) \iff \begin{cases} a + x = 0 \\ b + y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -a \\ y = -b \end{cases}$$

Logo, existe $z' = (-a,-b)$, chamado de "simétrico" ou "inverso aditivo" de z, no qual somado ao complexo $z = (a,b)$ resulta em $e_a = (0,0)$. □

Corolário 4.1 (Subtração)**.** *Decorre do teorema anterior que, dados* $z_1 = (a,b)$ *e* $z_2 = (c,d)$

elementos de $\mathbb{C}$, existe um único $z \in \mathbb{C}$ tal que $z_1 + z = z_2$, visto que:

$$\begin{aligned} z_1 + z = z_2 &\implies z_1' + (z_1 + z_2) = z_1' + z_2 \\ &\implies (z_1' + z_1) + z = z_2 + z_1' \\ &\implies e_a + z = z_2 + z_1' \\ &\implies z = z_2 + z_1'. \end{aligned}$$

O elemento z denominado de "diferença" entre z_2 e z_1 e indicado como $z_2 - z_1$, assim:

$$z_2 - z_1 = z_2 + z_1' = (c, d) + (-a, -b) = (c - a, d - b).$$

4.3.1.2 Propriedades da Multiplicação

Teorema 4.2. *A operação de multiplicação no conjunto $\mathbb{C}$ verifica as seguintes propriedades:*

(M_1) *Associatividade*

$(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$*, quaisquer que sejam $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$.*

(M_2) *Comutatividade*

$z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$*, quaisquer que sejam $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$.*

(M_3) *Existência do elemento neutro*

Existe um elemento $e_m \in \mathbb{C}$ tal que $z \cdot e_m = z$, qualquer que seja $z \in \mathbb{C}$

(M_4) *Existência do elemento simétrico*

Para todo $z \in \mathbb{C}$ existe um elemento $z'' \in \mathbb{C}$ tal que $z \cdot z'' = e_m$.

Demonstração. Sejam $z_1 = (a, b)$, $z_2 = (c, d)$ e $z_3 = (e, f)$ elementos de $\mathbb{C}$.

(M_1) Observe que:

$$\begin{aligned} (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 &= [(a, b) \cdot (c, d)] \cdot (e, f) \\ &= (ac - bd, ad + bc) \cdot (e, f) \\ &= [(ac - bd) \cdot e - (ad + bc) \cdot f, (ac - bd) \cdot f + (ad + bc) \cdot e] \\ &= (ace - bde - adf - bcf, acf - bdf + ade + bce) \\ &= [a(ce - df) - b(de + cf, a(cf + de) + b(ce - df)] \\ &= (a, b) \cdot (ce - df, cf + de) \\ &= (a, b) \cdot (= [(c, d) \cdot (e, f)] \\ &= z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3). \end{aligned}$$

(M_2) Note que:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (a,b)\cdot(c,d) \\ &= (ac-bd, ad+bc) \\ &= (ca-db, da+cb) \\ &= (c,d)\cdot(a,b) \\ &= z_2 \cdot z_1. \end{aligned}$$

(M_3) Tomando $z=(a,b)$, provemos que existe $e_m=(x,y)$ tal que $z\cdot e_m = z$:

$$\begin{aligned} (a,b)+(x,y)=(a,b) &\iff (ax-by, ay+bx)=(a,b) \\ &\iff \begin{cases} ax-by=a \\ ay+bx=b \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases} \end{aligned}$$

Logo, existe $e_m=(1,0)$, chamado de "elemento neutro" para multiplicação, no qual multiplicado por qualquer complexo z resulta no próprio z.

(M_4) Tomando $z=(a,b)$, com $a\neq 0$ ou $b\neq 0$, provemos que existe $z''=(x,y)$ tal que $z\cdot z''=e_m$:

$$\begin{aligned} (a,b)\cdot(x,y)=(1,0) &\iff (ax-by, ay+bx)=(1,0) \\ &\iff \begin{cases} ax-by=1 \\ ay+bx=0 \end{cases} [0.25cm] \\ &\iff x=\frac{a}{a^2+b^2} \text{ e } y=\frac{-b}{a^2+b^2}. \end{aligned}$$

Logo, existe

$$z''=\left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right),$$

chamado de "inverso" ou "inverso multiplicativo" de z, no qual multiplicado por $z=(a,b)$ resulta em $e_m=(1,0)$. Destaquemos que a condição $a\neq 0$ ou $b\neq 0$ equivale a $a^2+b^2\neq 0$, o que garante a existência de z''.

□

Corolário 4.2 (Divisão)**.** *Decorre do teorema anterior que, dados* $z_1 = (a, b) \neq (0, 0)$ *e* $z_2 = (c, d)$ *elementos de* $\mathbb{C}$*, existe um único* $z \in \mathbb{C}$ *tal que* $z_1 \cdot z = z_2$*, visto que:*

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z = z_2 &\implies z_1'' \cdot (z_1 \cdot z) = z_1'' \cdot z_2 \\ &\implies (z_1' \cdot z_1) \cdot z = z_2 \cdot z_1'' \\ &\implies e_m \cdot z = z_2 \cdot z_1' \\ &\implies z = z_2 \cdot z_1'. \end{aligned}$$

O elemento z *denominado de "quociente" entre* z_2 *e* z_1 *e indicado como* $\dfrac{z_2}{z_1}$*, assim:*

$$\frac{z_2}{z_1} = z_2 \cdot z_1' = (c, d) \cdot \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right) = \left(\frac{ca - db}{a^2 + b^2}, \frac{da - cb}{a^2 + b^2} \right).$$

4.4 Forma algébrica de um número complexo

Definição 4.2. *Como discutimos anteriormente, o conjunto* $\mathbb{C}$ *é formado pelos números que podem ser expressos como* $z = a + bi$*, em que* $a \in \mathbb{R}$*,* $b \in \mathbb{R}$ *e* $i = \sqrt{-1}$*, ou seja:*

$$\mathbb{C} = \{z = a + bi \mid a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, i = \sqrt{-1}\}.$$

Assim, todo número complexo possui a forma $z = a + bi$, que é denominada de forma algébrica de um número complexo. Segundo (IEZZI, 2005), o número real a é chamado de parte real de z e o número real b é chamado de parte imaginária de z. Representamos simbolicamente da seguinte forma:

$$a = \mathrm{Re}(z) \text{ e } b = \mathrm{Im}(z).$$

Denomina-se de "real" todo número complexo cuja parte imaginária é nula e denomina-se de "imaginário puro" todo número complexo cuja parte real é nula e a imaginária não. Dessa maneira, considerando um número complexo $z = a + bi$, temos que:

$$\left.\begin{matrix} a = 0 \\ b \neq 0 \end{matrix}\right\} \implies z = bi \text{ (imaginário puro)}$$

$$b = 0 \implies z = a \text{ (real)}$$

Tomemos $z_1 = a + bi$ e $z_1 = c + di$ dois elementos de $\mathbb{C}$ para determinar as seguintes definições:

(i) Igualdade:

Dois números complexos são iguais se, e somente se, suas partes reais são iguais e suas partes imaginárias são iguais. Ou seja,

$$a + bi = c + di \iff a = c, b = d.$$

(ii) Adição:

Define-se a soma de dois números complexos é um complexo cuja parte real é dada pela soma das partes reais das parcelas e cuja parte imaginárias é dada pela soma das partes imaginárias das parcelas. Isto é,

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i.$$

(iii) Multiplicação:

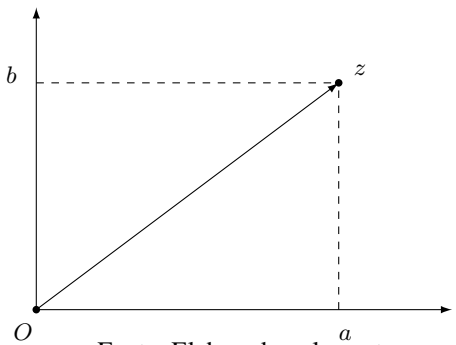
Define-se o produto de dois números complexos a partir do desenvolvimento de $(a + bi) \cdot (c+di)$, aplicando a propriedade distributiva e considerando, segundo (BOMBELLI, 1579), que $i^2 = (+i) \cdot (+i) = -1$. Isto é,

$$\begin{aligned}(a + bi) \cdot (c + di) &= a \cdot (c + di) + b \cdot (c + di) \\ &= ac + adi + bci + bdi^2 \\ &= ac + adi + bci - bd \\ &= (ab - bd) + (ad + bc)i.\end{aligned}$$

4.5 Interpretação geométrica

Segundo (CARMO; MORGADO; WAGNER, 2005), pelas definições anteriores, podemos considerar o número $z = a + bi$ como o ponto (a, b) do plano cujas coordenadas são a e b, ou ainda como um vetor de origem O do sistema de coordenadas e extremidade (a, b), isto é, o complexo z é representado pelo vetor $\overrightarrow{Oz}$ (Figura 4.1).

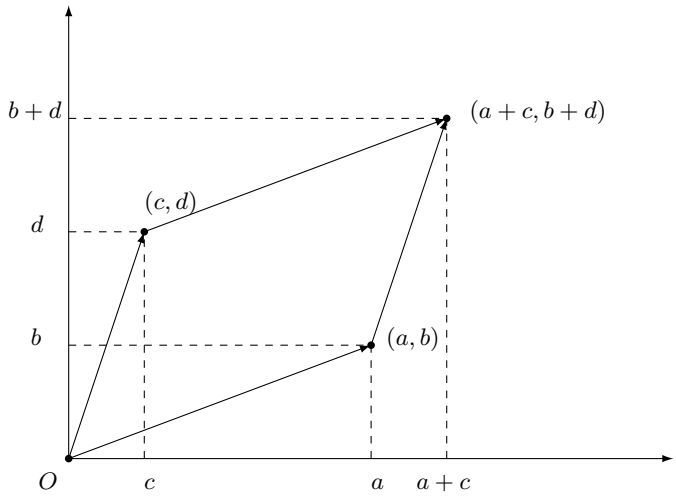
Figura 4.1 – Vetor $\overrightarrow{Oz}$.



Fonte: Elaborado pelos autores.

No primeiro caso, chamamos o ponto (a, b) de *imagem* do complexo $z = a+bi$ e no último caso, os números a e b são chamados de *componentes* do vetor $\overrightarrow{Oz}$. Como vimos anteriormente, as operações de soma e produto de dois complexos são definidas como:

Figura 4.2 – Soma de vetores no plano.



Fonte: Elaborado pelos autores.

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i,$$

$$(a + bi) \cdot (c + di) = (ab - bd) + (ad + bc)i.$$

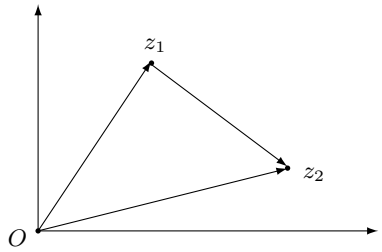
Ou seja, a soma de dois complexos é representada por um vetor, cujas componentes são as somas das componentes dos vetores dados. Com isso, como pode-se observa na Figura 4.2, a soma é representada geometricamente pela diagonal do paralelogramo construído sobre os vetores dados. Para apresentar a interpretação geométrica da multiplicação é a representação trigonométrica dos complexos.

(CARMO; MORGADO; WAGNER, 2005) acrescenta que a diferença de dois complexos z_1 e z_2 pode ser interpretada geometricamente. Observando a Figura 4.3, temos que:

$$\overrightarrow{Oz_1} + \overrightarrow{z_1z_2} = \overrightarrow{Oz_2} \text{ ou } \overrightarrow{z_1z_2} = \overrightarrow{Oz_2} - \overrightarrow{Oz_1},$$

onde o vetor $z_1\vec{z}_2$ representa a diferença $z_2 - z_1$.

Figura 4.3 – Representação dos vetores z_1 e z_2 no plano complexo.



Fonte: Elaborado pelos autores.

4.6 Conjugado, módulo e quociente de um número complexo

Por (CARMO; MORGADO; WAGNER, 2005), definimos o conjugado, o módulo e o quociente de um número complexo z da seguinte maneira, conforme apresentadas a seguir.

Definição 4.3. *Dado um número complexo $z = a + bi$, definimos o conjugado de um número complexo $z =$ como o número complexo $\overline{z} = a - bi$. Geometricamente, o conjugado $\overline{z}$ de z é representado pelo simético de z relativamente ao eixo Ox.*

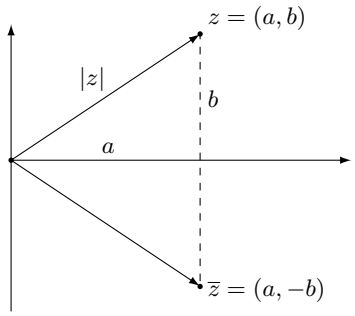
Definição 4.4. *Dado um número $z = a+bi$, chama-se módulo de $|z|$ ao número real não negativo $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Geometricamente, $|z|$ mede a distância de O a z, ou seja, mede o módulo do vetor que representa o complexo z, como se vê facilmente pelo Teorema de Pitágoras.*

Os autores acrescentam que uma relação entre os dois conceitos citados é obtida da seguinte forma:

$$z \cdot \overline{z} = (a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 + b^2 = |z|^2,$$

ou seja, o produto de um complexo z pelo seu conjugado é igual ao quadrado do módulo de z.

Figura 4.4 – Representação do conjugado e módulo de um número complexo z.



Fonte: Elaborado pelos autores.

4.6.1 Conjugado da soma e do produto

Teorema 4.3. *Se z_1 e z_2 são números complexos, então*

(i) $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$;

(ii) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$.

Demonstração. Tomemos $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c = di$, então

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (ac - bd) + (bc + ad)i, \\ \overline{z_1 z_2} &= (ac - bd) - (bc + ad)i. \end{aligned}$$

Por outro lado, temos que $\overline{z_1} = a - bi$ e $\overline{z_2} = c - di$, logo,

$$\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = (a - bi) \cdot (c - di) = (ac - bd) - (bc + ad)i = \overline{z_1 z_2},$$

desse modo demonstramos o item (i).

Além disso,

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (a + c) + (b + d)i, \\ \overline{z_1 + z_2} &= (a + c) - (b + d)i. \end{aligned}$$

Por outro lado, temos que $\overline{z_1} = a - bi$ e $\overline{z_2} = c - di$, logo,

$$\overline{z_1} + \overline{z_2} = (a - bi) + (c - di) = (a + c) - (b + d)i = \overline{z_1 + z_2},$$

desse modo demonstramos o item (ii). □

4.6.2 Módulo do produto

Teorema 4.4. *Se z_1 e z_2 são dois números complexos quaisquer, então:*

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|.$$

Demonstração. (i) Note que:

$$|z_1 z_2|^2 = (z_1 z_2) \cdot (\overline{z_1 z_2}) = z_1 z_2 \overline{z_1 z_2} = z - 1\overline{z_1} z_2 \overline{z_2} = |z_1|^2 \cdot |z_2|^2 = (|z_1||z_2|)^2.$$

Como módulos são positivos ou nulos, podemos extrair a raiz quadrada de ambos os membros e obter a seguinte igualmente:

$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|.$$

□

Definição 4.5. *Dados dois complexos z_1 e $z_2 \neq 0$, definimos o quociente $\dfrac{z_1}{z_2}$ como sendo o produto $z_1 \cdot \dfrac{1}{z_2}$. Na prática, convém não usar a expressão de $\dfrac{1}{z_2}$, a qual encontramos pela genelização dada por:*

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z \cdot \overline{z}} = \frac{\overline{z}}{|z|^2},$$

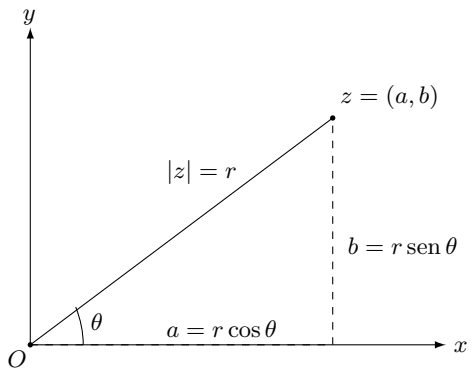
e efetuar a divisão multiplicando ambos os membros pelo conjugado do denominador.

4.7 Trigonometria e os números complexos

Um número complexo $z = a + bi$ pode ser pensado como um ponto de coordenadas (a, b) pertencente a um plano ou um vetor $\overrightarrow{Oz}$ de origem O e extremidade (a, b). Segundo (CARMO; MORGADO; WAGNER, 2005), uma representação dos elementos geométricos do vetor $\overrightarrow{Oz}$ é obtida da seguinte maneira:

Consideremos $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ o comprimento de $\overrightarrow{Oz}$, de modo que seja diferente de zero, e por θ o ângulo positivo xOz.

Figura 4.5 – Representação de um número complexo z no plano de Argand-Gauss.



Fonte: Elaborado pelos autores.

Daí, obtemos: $\frac{a}{r} = \cos\theta$ e $\frac{b}{r} = \sin\theta$, assim,

$$\begin{aligned} z = a + bi &= r\cos\theta + r\sin\theta i \\ &= r \cdot (\cos\theta + i\sin\theta). \end{aligned}$$

A representação $z = r \cdot (\cos\theta + i\sin\theta)$ é denominada de *forma trigonométrica* do complexo z.

Substituindo θ na expressão acima por $\theta + 2k\pi$, onde k é um inteiro positivo ou nulo, nota-se que o complexo z não se altera. Com isso, em alguns casos é conveniente adotar a expressão:

$$z = r \cdot (\cos(\theta + 2kx) + i\sin(\theta + 2kx))$$

e justificar que os valores de $\theta + 2kx$ são os *argumentos* de z.

A forma trigonomética dos complexos permite obter uma interpretação geométrica da operação de multiplicação dos complexos da seguinte forma:

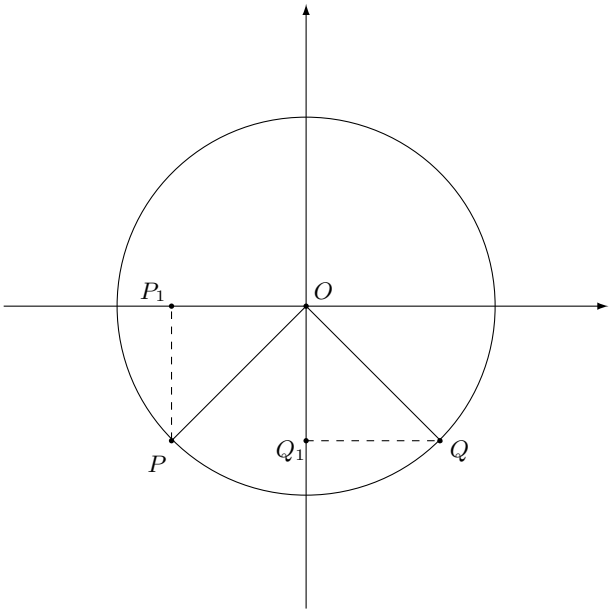
Se x é um número qualquer, então

$$\begin{aligned} \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) &= -\sin x, \\ \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) &= \cos x. \end{aligned}$$

Com efeito, os triângulos OPP_1 e OQQ_1 da figura 4.6 são congruentes, pois possuem ângulos iguais e os lados $|OP| = |OQ|$. Logo, em valor absoluto,

$$\begin{aligned}\left|\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right| &= |QQ_1| = |PP_1| = |\sin x|,\\ \left|\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right| &= |OQ_1| = |OP_1| = |\cos x|.\end{aligned}$$

Figura 4.6 – $\widehat{AP} = x$ e $\widehat{AQ} = x + \frac{\pi}{2}$



Fonte: Elaborado pelos autores.

Como x e $x + \dfrac{\pi}{2}$ estão sempre em quadrantes adjacentes, obtemos os sinais indicados. E embora a figura tenha sido feita no $3°$ quadrante, a demonstração é válida em qualquer quadrante.

Vamos agora interpretar geometricamnete a multiplicação de dois complexos unitários. Um complexo unitário $z_1 = cos\theta_1 + i\sin\theta_1$ é representado por um ponto do círculo unitário S_1. Sabendo que:

$$\begin{aligned} iz_1 &= i(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)\\ &= -\sin\theta_1 + i\cos\theta_1\\ &= \cos\left(\theta_1 + \frac{\pi}{2}\right),\end{aligned}$$

podemos concluir que multiplicar z_1 por i é o mesmo que efetuar no ponto z_1 uma rotação positiva de $\dfrac{\pi}{2}$.

Agora, tomemos $z_2 = \cos\theta_2 + i\sin\theta_2$ um outro complexo unitário, então

$$z_1 z_2 = (\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)\cdot z_1 = \cos\theta_2 z_1 + \sin\theta_2 i z_1,$$

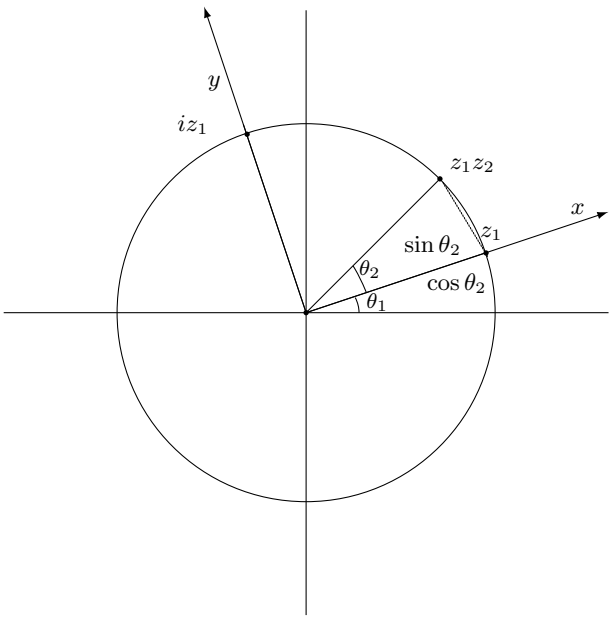
ou seja, o vetor que representa $z_1 z_2$ é a soma dos vetores perpendiculares $\cos\theta_2 z_1$ e $\sin\theta_1 i z_1$. Considerando um sistema de coordenadas xOy, cujo eixo Ox coincide com Oz_1 (Figura 4.7), descobrimos que o ângulo de z_1 com $z_1 z_2$ é θ_2.

Assim, conclui-se que multiplicar dois complexos unitários z_1 e z_2 significa, geometricamente, impor a um deles uma rotação positiva de ângulo igual ao ângulo do outro.

No caso dos complexos não serem unitários, consideramos $w_1 = r_1 z_1$ e $w_2 = r_2 z_2$, com $|z_1| = |z_2| = 1$, e o produto será:

$$w_1 w_2 = r_1 z_1 r_2 z_2 = r_1 r_2 z_1 z_2.$$

Figura 4.7 – Sistema de coordenadas xOy, onde o eixo Ox coincide com o eixo Oz_1.



Fonte: Elaborado pelos autores.

Teorema 4.5. *Se x e y são reais quaiquer:*

(i) $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$;

(ii) $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x$.

Demonstração. Se x e y satisfazem a seguinte condição:

$$0 \leq x < 2\pi \text{ e } 0 \leq y < 2\pi,$$

Daí, escrevemos:

$$z_1 = \cos x + i \sin x \text{ e } z_2 = \cos y + i \sin y.$$

Pela interpretação geométrica do produto, obtemos:

$$z_1 z_2 = \cos(x+y) + i\sin(x+y). \tag{4.1}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (\cos x + i\sin x)\cdot(\cos y + i\sin y) \\ &= (\cos x\cos y - \sin x\sin y) + i(\sin x\cos y + \sin y\cos x). \end{aligned} \tag{4.2}$$

igualando as partes reais e imaginárias nos itens (4.1) e (4.2), temos que:

$$\begin{aligned} \cos(x+y) &= \cos x\cos y - \sin x\sin y, \\ \sin(x+y) &= \sin x\cos y + \sin y\cos x, \end{aligned}$$

o que demonstra o teorema para esse caso.

Agora, se x e y são quaisquer, existem k e j inteiros, tais que

$$0 \leq x + 2k\pi = x' < 2\pi \text{ e } 0 \leq y + 2j\pi = y' < 2\pi.$$

Por definição, $\cos x = \cos x'$, $\sin x = \sin x'$, $\cos y = \cos y'$ e $\sin y = \sin y'$. Além disso, observa-se imediatamente que $\cos(x+y) = \cos(x'+y')$ e $\sin(x+y) = \sin(x'+y')$. Como mostramos a relações para x' e y', segue-se que elas são válidas para x e y. □

Outra consequência imediata, além do Teorema 4.5, da interpretação geométrica do produto de números complexos é a conhecida *Fórmula de De Moivre*, que se trata da seguinte expressão:

$$(\cos x + i\sin x)^n = \cos(nx) + i\sin(nx),$$

onde n é um inteiro positivo. Geometricamente, a fórmula acima indica que elevar o complexo unitário $\cos x + \sin x$ à potência n equivale a efetuar sobre ele n rotações sucessivas de ângulo x.

4.8 Raízes de números complexos

Uma das utilidades da Fórmula de De Moivre, além de permitir calcular o $\cos(nx)$ e $\sin(nx)$ sem o uso das fórmulas de adição, é a determinação de raízes de números complexos.

Mostraremos seguindo o exemplo dado por (CARMO; MORGADO; WAGNER, 2005): Queremos encontrar as raízes cúbicas de $z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$. Primeiro, definimos a forma trigonométrica do número complexo:

$$z = \cos(30^\circ + k360^\circ) + i\sin(30^\circ + k360^\circ),$$

onde k é um inteiro.

Sabemos que qualquer número complexo da forma:

$$z_k = \cos\left(\frac{30^\circ + k360^\circ}{3}\right) + i\sin\left(\frac{30^\circ + k360^\circ}{3}\right)$$

é uma raiz de z, pois, pela fórmula de De Moivre, $(z_k)^3 = z$. Então, os possiveis valores de z_k são:

$$\begin{aligned}
k = 0 \quad &\Rightarrow \quad z_0 = \cos 10^\circ + i\sin 10^\circ, \\
k = 1 \quad &\Rightarrow \quad z_1 = \cos 130^\circ + i\sin 130^\circ, \\
k = 2 \quad &\Rightarrow \quad z_2 = \cos 250^\circ + i\sin 250^\circ, \\
k = 3 \quad &\Rightarrow \quad z_3 = \cos 10^\circ + 360^\circ + i\sin 10^\circ + 360^\circ = z_0.
\end{aligned}$$

Note que a partir de $z_3 = z_0$ as raízes começam a se repetir. Além disso, ao considerar os valores negativos de k, podemos verificar que, para $k = -1$, obtém-se z_2 e para $k = -2$, obtém-se z_1, e a partir daí o padrão para a se repetir.

Com isso, deduzimos que existem extatamente três raízes cúbicas de z, que definimos como z_0, z_1 e z_2. (CARMO; MORGADO; WAGNER, 2005) comenta que o raciocínio é inteiramente geral. Se consideramos $z = \cos(\theta + k2\pi) + i\sin(\theta + k2\pi)$, o complexo z_k será uma raiz n-ésima de z se e somente se z_k for da forma:

$$z_k = \cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right).$$

Nota-se que os valores $k = 0, 1, ..., n-1$, geram as raízes $z_0, z_1, ..., z_{n-1}$ distintas, correspondentes aos ângulos

$$\frac{\theta}{n}, \frac{\theta}{n} + \frac{2\pi}{n}, ..., \frac{\theta}{n} + \frac{2(n-1)\pi}{n},$$

respectivamente. E para os valores restantes de k, sendo $k = n, n+1, ...$, os ângulos se repetem resultando em:

$$\frac{\theta}{n} + \frac{2}{\pi}, \frac{\theta}{n} + \frac{2\pi}{n} + 2\pi, ...,$$

respectivamente. Ademais, os valores negativos de k não fornecem nada além das raízes já encontradas. Assim, conclui-se que um número complexo possui exatamente n raízes de ordem n.

4.8.1 Lei do cosseno

Afim de concluir as aplicações dos números complexos à trigonometria, (CARMO; MORGADO; WAGNER, 2005) nos apresenta outra forma de obter a Lei do Cosseno, do seguinte modo:

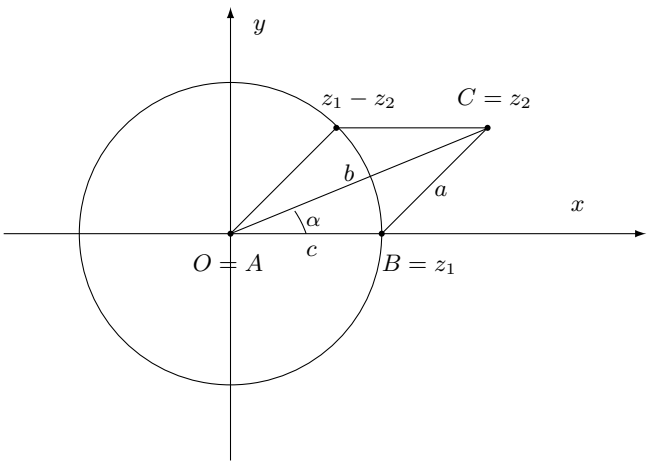
Proposição 4.1. *Em um triângulo A, B, C qualquer, temos que:*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A}$$

onde a, b e c são os lados opostos aos vértices A, B e C, respectivamente.

Demonstração. Adota-se um sistema de coordenadas xOy de forma que o ponto A coincida com a origem O e OB esteja alinhado com o eixo Ox. Considere $z_1 = r_1$ o número complexo representado por B e $z_2 = r_2(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ o número complexo associado ao ponto C (Figura 4.8).

Figura 4.8 – Número complexo $z_1 = r_1$ e $z_2 = r_2(\cos\alpha + i\sin\alpha)$.



Fonte: Elaborado pelos autores.

□

Daí, $|z_1 - z_2|^2 = a^2$ e

$$|z_1 - z_2|^2 = (z_1 - z_2) \cdot (\overline{z_1} - \overline{z_2}) = z_1\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} - (z_2\overline{z_1} + z_1\overline{z_2}).$$

Como:

$$\begin{aligned} z_2\overline{z_1} &= r_1 r_2(\cos\alpha + i\sin\alpha), \\ z_1\overline{z_2} &= r_1 r_2(\cos\alpha + i\sin\alpha) r_1, \end{aligned}$$

temos que:

$$z_2\overline{z_1} + z_1\overline{z_2} = r_1 r_2(2\cos\alpha).$$

Logo,

$$|z_1 - z_2|^2 \;=\; a^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2r_1 r_2\cos\alpha = b^2 + c^2 - 2bc\cdot\cos\hat{A}.$$

A última observação que foi feita pelo autor se trata de consideramos o círculo S_1 como um subconjunto:

$$S_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$$

no plano complexo, com a aplicação $E : \mathbb{R} \to S^1 \subset \mathbb{C}$, onde assume a forma: $E(x) = \cos x + i\sin x$. Com isso, podemos verificar que:

$$\begin{aligned} E(x+y) &= \cos(x+y) + i\sin(x+y) \\ &= (\cos x\cos y - \sin x\sin y) + i(\sin x\cos y + \cos x\sin y) \\ &= (\cos x + i\sin x)\cdot(\cos y + i\sin y) \\ &= E(x)\cdot E(y). \end{aligned}$$

Logo, a função $E(x)$ é uma função complexa que se comporta como uma exponencial, com isso Euler desenvolveu a expressão:

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x.$$

O autor comenta que no tempo de Euler, as funções complexas não eram compreendidas, e a definição acima levantou diversas controvérsias, que levaram a conclusões inesperadas, como $e^{i\pi} = 1$. O mesmo acrescenta:

> "Posteriormente, com um melhor conhecimento das funções complexas, verificou-se que a definição de Euler é a única possível, se quizermos manter para os complexos as propriedades válidas nos reais." (CARMO; MORGADO; WAGNER, 2005)

Assim, notamos que Euler não apenas desenvolveu uma relação, mas descobriu uma consequência lógica inevitável presente na estrutura dos números complexos.

5 Algumas aplicações

Diante da apresentação dos fundamentos teóricos dos Números Complexos, torna-se importante enfatizar a relação entre a teoria e a prática de seus conceitos, dado que essa conexão se trata de um elemento fundamental para a compreensão mais significativa do tema. Desse modo, as aplicações aqui apresentadas foram selecionadas tendo em vista estabelecer uma conexão entre os aspectos teóricos brevemente expostos e sua aplicabilidade em diferentes situações.

5.1 Aplicação em problemas de somatórios

Na dissertação do autor (JUNIOR et al., 2016) é apresentado uma aplicação dos números complexos voltada a resolução de problemas de somatório. O autor descreve que ao associarmos as relações trigométricas com os resultados do Teorema binomial de Newton, segundo ele, podemos observar uma aplicação pouco explorada e que permite a resolução de problemas com grau elevado de dificuldade, que seriam os problemas que envolvem somatórios.

Primeiro, o autor analisa as conexões entre potências cíclicas de i e o desenvolvimento do binomial. Ele atribui $x = 1$ e $x = -1$ no Teorema do Binômio de Newton, que é dado por:

$$(1+x)^n = \binom{n}{0}x^0 + \binom{n}{1}x^1 + ... + \binom{n}{n}x^n, x \in \mathbb{R}.$$

Realizando algumas operações entre as duas atribuições para x, pode-se obter:

$$\begin{aligned} \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + ... &= 2^{n-1}, \\ \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + ... &= 2^{n-1}. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Em seguida, ele toma também $x = i$, onde relaciona com a expressão:

$$(1+i)^n = (2)^{\pi/2}\cos\frac{\pi}{4},$$

assim obtendo os seguintes resultados:

$$\begin{aligned} \binom{n}{0} - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \binom{n}{6} + ... &= (2)^{n/2}\cos\frac{n\pi}{4}, \\ \binom{n}{1} - \binom{n}{3} + \binom{n}{5} - \binom{n}{7} + ... &= (2)^{n/2}\sin\frac{n\pi}{4}. \end{aligned}$$

E por fim, ao relacionar esses resultados com as expressões de (5.1), teremos:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{4} + \binom{n}{8} + \cdots = 2^{n-1} + (2)^{(n-2)/2} \cos \frac{n\pi}{4},$$

$$\binom{n}{1} + \binom{n}{5} + \binom{n}{9} + \cdots = 2^{n-1} + (2)^{(n-2)/2} \sin \frac{n\pi}{4}.$$

O autor finaliza essa demonstração com a seguinte observação:

> "[...] com os resultados obtidos, temos condições de resolver problemas que envolvam somatórios binomiais com repetições em ciclos de dois e quatro. Porém, é bastante comum estarmos em contato com somas binomiais que se repetem em ciclos diferentes de dois e de quatro. A fim de solucionar esses problemas, apresentamos uma nova característica dos números complexos. " (JUNIOR et al., 2016)

5.2 Aplicação em problemas de rotação

Os números complexos podem ser usados na resolução de problemas de Geometria que envolvem rotação. (CARMO; MORGADO; WAGNER, 2005) aborda em seu livro o seguinte problema:

Consideremos o problema de determinar o vértice C de um triângulo equilátero ABC, onde os vértices $a = (1, 2)$ e $B = (3, 5)$.

Existem duas soluções, C_1 e C_2 (Figura 5.1). Obtemos o vetor $\overrightarrow{AC_1}$ quando giramos o vetor $\overrightarrow{AB}$ de $60°$ em torno de sua origem, ou seja,

$$\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AB}(\cos 60° + i \sin 60°).$$

Se determinamos O como a origem do sistema de coordenadas, temos que:

$$\overrightarrow{OC_1} - \overrightarrow{OA} = (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) \cdot \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ ou}$$

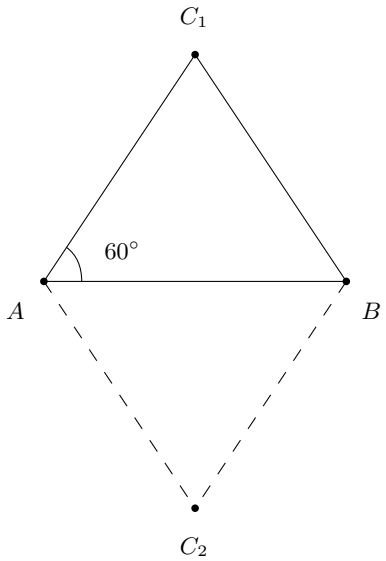
$$\overrightarrow{OC_1} - (1 + 2i) = [(3 + 5i) - (1 + 2i)] \cdot \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

o que resulta em:

$$\overrightarrow{OC_1} = \frac{4 - 3\sqrt{3}}{2} + i\frac{7 + 2\sqrt{3}}{2},$$

isto é,

Figura 5.1 – Soluções C_1 e C_2



Fonte: Elaborado pelos autores.

$$C_1 = \left(\frac{4 - 3\sqrt{3}}{2}, \frac{7 + 2\sqrt{3}}{2} \right).$$

(CARMO; MORGADO; WAGNER, 2005) menciona que a outra solução é adquirida ao girar $\overrightarrow{AB}$ em $-60°$ em torno do ponto A.

5.3 Aplicação no cálculo das áreas de polígonos

O autor (MARTINS, 2018) apresenta em sua dissertação de Mestrado, que se trata de um estudo acerca dos números complexos, algumas aplicação dos número complexos na Geometria. Entre elas, apresentaremos uma aplicação voltada ao cálculo de áreas de polígonos no plano complexo, que demonstra como os números complexos podem ser utilizamos para solucionar problemas na geometria plana.

5.3.1 Área do triângulo

(MARTINS, 2018) apresenta uma formulação para o cálculo da área de um triângulo no plano complexo partindo de seus vértices. O autor adota a seguinte proposição:

Proposição 5.1. *Seja $\triangle z_1 z_2 z_3$ um triângulo qualquer no plano complexo. Então sua área $A(\triangle z_1 z_2 z_3)$ é dada por:*

$$A(\triangle z_1 z_2 z_3) = \frac{i}{4}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ \overline{z_1} & \overline{z_2} & \overline{z_3} \end{vmatrix}.$$

A demonstração é descrita a partir da configuração dos vértices do triângulo no plano complexo, onde define-se que os três vértices são compostos por números complexos na forma $z_k = x_k + iy_k$. Da observação dessa figura no plano, nota-se que o triângulo é decomposto em três trapézios: $y_1y_2x_2x_1$, $y_1x_1x_3y_3$ e $y_2x_2x_3y_3$, e que a área do triângulo será dada por:

$$A(\triangle z_1 z_2 z_3) = A(y_1y_2x_2x_1) + A(y_1x_1x_3y_3) - A(y_2x_2x_3y_3).$$

Ao expandir as áreas dos trapézios e agrupar os termos, teremos:

$$A(\triangle z_1 z_2 z_3) = \frac{i}{4}[(x_1y_2 - y_1x_2) + (x_2y_3 - y_2x_3) + (x_3y_1 - y_3x_1)].$$

Em seguida, após converter cada termo cartesiano para a forma complexa, substitui-se cada identidade na expressão da área:

$$A(\triangle z_1 z_2 z_3) = \frac{i}{4}(z_1\overline{z_2} - \overline{z_1}z_2 + z_2\overline{z_3} - \overline{z_2}z_3 + z_3\overline{z_1} - \overline{z_3}z_1).$$

Assim, resultando:

$$A(\triangle z_1 z_2 z_3) = \frac{i}{4}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ \overline{z_1} & \overline{z_2} & \overline{z_3} \end{vmatrix}.$$

Além disso, o autor acrescenta que ao aplicar o Teorema de Laplace na primeira linha do determinante, teremos que:

$$A(\triangle z_1 z_2 z_3) = \frac{i}{4}\left(\begin{vmatrix} z_1 & z_2 \\ \overline{z_1} & \overline{z_2} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} z_2 & z_3 \\ \overline{z_2} & \overline{z_3} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} z_3 & z_1 \\ \overline{z_3} & \overline{z_1} \end{vmatrix}\right).$$

5.3.2 Área de um polígono convexo

Sabendo que a área de um polígono convexo é igual a soma das áreas dos triângulos em que este polígono pode ser decomposto, (MARTINS, 2018) demonstra, a partir do resultado estabelecido anteriormente para calcular a área de um triângulo, a seguinte proposição:

Proposição 5.2. *Seja $z_1z_2...z_n$ um polígono qualquer convexo no plano complexo. Então:*

$$A(z_1z_2\ldots z_n) = \frac{i}{4}\left(\begin{vmatrix} z_1 & z_2 \\ \overline{z_1} & \overline{z_2} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} z_2 & z_3 \\ \overline{z_2} & \overline{z_3} \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} z_n & z_1 \\ \overline{z_n} & \overline{z_1} \end{vmatrix}\right).$$

5.3.3 Área de um polígono regular

(MARTINS, 2018) aplica os resultados anteriormente ao caso particular: As raízes n-ésimas de um número complexo $z \neq 0$, no qual representa geometricamente os vértices de um polígono regular de n lados. Considerando as raízes $z_0, z_1, ..., z_{n-1}$, a área desse polígomo será dada por:

$$A(z_0 z_1 \dots z_{n-1}) = \frac{i}{4}\left(\begin{vmatrix} z_0 & z_1 \\ \overline{z_0} & \overline{z_1} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} z_1 & z_2 \\ \overline{z_1} & \overline{z_2} \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} z_{n-1} & z_0 \\ \overline{z_{n-1}} & \overline{z_0} \end{vmatrix}\right).$$

O autor comenta que a proposição a seguir mostra que é possível determinar essa área sem a necessidade de calcular suas raízes.

Proposição 5.3. *Seja $z = x + yi$ um número complexo não nulo. Temos que a área do polígono regular $z_0, z_1, ..., z_{n-1}$, que são raízes n-ésimas de z, é dada por:*

$$A(z_0, z_1, ..., z_{n-1}) = \frac{n\sqrt[n]{x^2+y^2}\sin\frac{2\pi}{n}}{2}.$$

A demonstração utiliza a fórmula para as raizes n-ésimas:

$$z_k = \sqrt[n]{|z|}\left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\,\sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right].$$

Aplicando as propriedades dos determinantes, teremos que o k-ésimo determinante será:

$$\begin{vmatrix} z_{k-1} & z_k \\ \overline{z_{k-1}} & \overline{z_k} \end{vmatrix} = -2i\sqrt[2n]{|z|\sin(\frac{2\pi}{n})}.$$

Observa-se que o resultado acima é independente de k, ou seja, todos os n determinantes possuem o mesmo resultado. Portanto, (MARTINS, 2018) conclui que:

$$A(z_0, z_1, ..., z_{n-1}) = \frac{n\sqrt[n]{x^2+y^2}\sin\frac{2\pi}{n}}{2}.$$

6 Considerações Finais

Este trabalho teve como objetivo central analisar o contexto histórico, social e conceitual que provocou a criação e o desenvolvimento dos números complexos, como também apresentar sua fundamentação teórica e algumas de suas aplicações. Os objetivos propostos foram atingidos por meio da pesquisa bibliográfia e qualitativa realizada.

Inicialmente, buscou-se apresentar o contexto histórico que gerou o surgimento dos números complexos, enfatizando as contribuições de matemáticos como Cardano, Tartaglia, Bombelli, Euler, Gauss, Hamilton, entre outros. Nesse trabalho, verificou-se que os números complexos surgiram do chamado "caso irredutível" das equações cúbidas, no qual a fórmula de Cardano-Tartaglia levam inevitavelmente a expressões envolvendo raízes quadradas de números negativos, por mais que as soluções sejam números reais. Com esse fato histórico evidenciamos como a matemática se desenvolve a partir de problemas, conforme argumentado por (ROQUE, 2012).

Em seguida, analisamos as principais contribuições teóricas que permitiram a consolidação dos números complexos. Desde as regras operatórias determinadas por Bombelli no século XVI, passando pela adoção da notação "i" por Euler, pela fórmula de De Moivre, pelo plano complexo de Gauss, até o reconhecimento dos números complexos como pares ordenados de números reais por Hamilton no século XIX. Esse percurso demonstra como a construção do conhecimento matemático se desenvolve de uma forma progressiva e coletiva.

Além disso, apresentamos os fundamentos teóricos dos números complexos, incluindo a definição da unidade imaginária, as propriedades de adição e multiplicação, conjugado, módulo e representação geométrica, sua relaçao com a trigonometria atráves da fórmula de De Moivre e a determinação de raízes n-ésimas. E por fim, foram apresentados algumas aplicações, as quais foram a resolução de somatórios binomiais e na resolução de problemas geómetricos, como a utilização dos números complexos em problemas de rotação e no cálculo de áreas de polígonos. Essas aplicações evidenciam como os números complexos são uma ferramenta poderosa para a resolução de problemas em diversas áreas da matemática.

Conclui-se que o objetivo principal desse trabalho foi alcançado, pois foi possivel não apenas descrever o percurso histórico e teórico dos números complexos, como também enfatizar sua relevância acadêmica e algumas de suas aplicações. Essa pesquisa reafirma que compreender o contexto histórico da matemática é importante e fundamental para uma aprendizagem mais significativa e para a valorização do conhecimento cientifico.

Referências

BOMBELLI, R. *L'Algebra*. Bolonha: G. Rossi, 1579.

BOYER, C. B. *História da Matemática*. 2. ed. São Paulo, 2001.

CARMO, M. P.; MORGADO, A. C.; WAGNER, E. *Trigonometria números complexos*. 3. ed. Rio de Janeiro: Editora SBM, 2005.

EVES, H. *Introdução à História da Matemática*. São Paulo: Editora da UNICAMP, 2008.

IEZZI, G. *Fundamentos de Matemática elementar: Complexos, polinômios, equações*. [S.l.]: Atual, 2005.

JUNIOR, R. R. G. et al. Números complexos: desenvolvimento e aplicações. Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, 2016.

MARCONI, M. d. A.; LAKATOS, E. M. *Fundamentos de metodologia cientifica*. 5. ed. São Paulo: Editora Atlas S.A., 2003.

MARTINS, F. J. d. S. Números complexos e suas aplicações na geometria. Universidade Federal do Ceará, 2018.

MILIES, C. P. A emergência dos números complexos. *Revista do Professor de Matemática*, São Paulo, n. 24, 1993.

ROQUE, T. *História da Matemática*. [S.l.]: Editora Schwarcz-Companhia das Letras, 2012.

SILVA, M. A. Da teoria à prática: uma análise histórica do desenvolvimento conceitual dos números complexos e suas aplicações. *Revista Brasileira de História da Ciência*, v. 4, n. 1, p. 79–91, 2011.